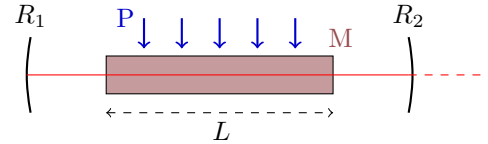


LASER - Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

I.A. hohe Kohärenz [zeitlich & räumlich], hohe Monochromasie, geringe Divergenz und lineare Polarisation.



Schwellwertbedingung: $R_1 R_2 e^{2\gamma L} > 1$; γ - Verstärkungskoeffizient des Mediums. Wellenzahl: $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$

In einem Zwei-Niveau-System treten Absorption $[B_{12}]$, induzierte Emission $[B_{21}]$ und spontane Emission $[A_{21}]$ auf; es gilt $\frac{B_{12}}{g_1} = \frac{B_{21}}{g_2}$ und $A_{21} = 8\pi h \frac{\nu^3}{c^3} B_{12}$ [g_i - statistische Gewichte]. Für das Verhältnis spontaner zu induzierter

Emission gilt $\frac{8\pi h \nu^3}{\rho(\nu)} \propto \nu^3$ [$\rho(\nu)$ - spektrale Energiedichte].

$$I_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c (|E|^2)$$

Emissionslinie [spektral] des aktiven Mediums aufgrund verschiedener Effekte verbreitert:

- homogene Effekte - gilt für alle Teilchen [mindestens im Mittel] gleich [z.B. spontane Emission mit $\tau_2 = \frac{1}{A_{21}}$, $P(\nu) \propto \frac{[\frac{\Delta\nu_{nat}}{2}]^2}{[\nu - \nu_{21}]^2 - [\frac{\Delta\nu_{nat}}{2}]^2}$ und $\Delta\nu_{nat} = \frac{1}{2\pi\tau_2}$ oder Stoßverbreiterung mit $\Delta\nu_{Coll} = \frac{1}{2\pi\tau_{Coll}} = \sqrt{\frac{3}{4mk_B T}} d^2 p$, Teilchendurchmesser d , -masse m , Druck p , Temperatur T , Boltzmannkonstante k_B].
- inhomogene Effekte - Teilchen in Klassen einteilbar, für die der Effekt jeweils unterschiedlich stark ist [z.B. Dopplerverbreiterung mit $v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$ und $\Delta\nu_D = 2\sqrt{\ln(2)} \nu_{21} \frac{v_m}{c}$ oder Stark-Effekt].

Intensität [Energieflussdichte] I , spektrale Intensität I_ν , spektrale Energiedichte $\rho(\nu) = \frac{I_\nu}{c}$, spektraler Photonenfluss

$\Phi_\nu = \frac{I_\nu}{h\nu}$, spektraler Absorptionskoeffizient α_ν , spektraler **Wirkungsquerschnitt** σ_ν , Teilchendichte N , Teilchenzahl

in V n , Absorption im Medium: $d\Phi_\nu = -\alpha_\nu \Phi_\nu dz = -N \sigma_\nu \Phi_\nu dz = - \underbrace{\frac{n}{A}}_A \sigma_\nu \Phi_\nu \frac{dz}{z}$.
 $\Rightarrow \sigma_\nu$ ist effektiver Querschnitt

σ kann als auf die Querschnittsfläche projizierte Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkung interpretiert werden.

Kohärenz:

HeNe-Laser $l_C \approx 300$ km

zeitliche K. \leftrightarrow Michelson-Interferometer

[für Laufzeitunterschiede größer $\tau_C = \frac{1}{\Delta\nu}$ [$\Delta\nu$ - spektrale Halbwertsbreite; $l_C = c\tau_C$] keine Interferenz mehr!]

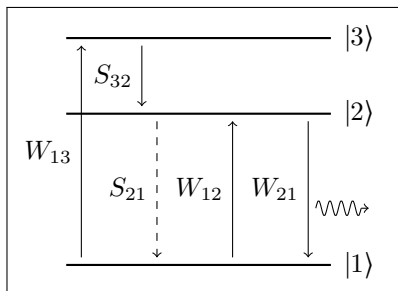
räumliche K. \leftrightarrow Young'scher Doppelspalt

[Ausdehnung einer Quelle statistischer Emittter vor Doppelspalt, ab Abstand der Spalte $d >$ Kohärenzlänge l_t verschwindet Interferenz [\Leftrightarrow Phasenfluktuation $> \pi$]; minimaler Spotdurchmesser bei Fokussierung mit f ist dann [ca.!] $\frac{f}{l_t} \lambda$]

Sichtbarkeit / Kontrast: $V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$.

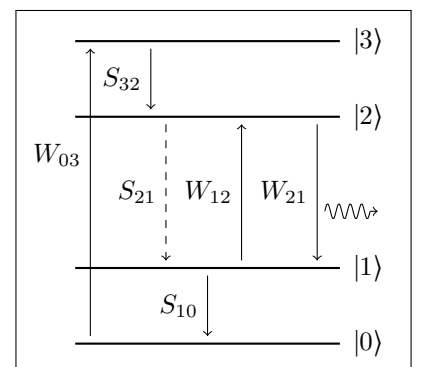
Im 2-Niveau-System im thermischen Gleichgewichtszustand keine Inversion möglich!

[unabhängig von Entartung der Zustände, Druck, Temperatur, ...]



Im 3-Niveau-System mit $S_{21} \ll S_{32}$ [Relaxation aus Pump-Zustand |3> schnell] Inversion mit $N_2 > N_1$ möglich im Gleichgewichtszustand. [z.B. Rubin-Laser]

Im 4-Niveau-System $S_{32} \gg S_{21}$ und $S_{10} > S_{21}$ und $W_{01} > S_{21}$, dann ist $N_2 > N_1$. [z.B. HeNe-Laser]



Kleinsignalverstärkung:

Wirkungsquerschnitt σ_ν , Inversionsdichte $n = N_2 - N_1$, Verstärkungskoeffizient $g(\nu) = \sigma_\nu n$, Intensität $I_\nu(z)$, dann gilt im Medium: $\frac{dI}{dz} = g(\nu)I(z)$. Verstärkungsfaktor eines Medium der Länge l : $G(\nu) = \frac{I_\nu(l)}{I_\nu(0)} = e^{g(\nu)l}$.

[bei Gauss-förmigen $g(\nu)$ mit FWHM $\Delta\nu_g$ gilt für die FWHM von $G(\nu)$: $\frac{\Delta\nu_G}{\Delta\nu_g} \approx \sqrt{\ln(G(\nu_0))}$.]

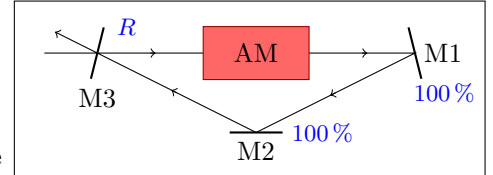
Für $g(\nu)l \gg 1$ wird das spontan emittierte Licht im Medium signifikant verstärkt

→ Amplified Spontaneous Emission [ASE] ⚡

[Mittels räumlicher, zeitlicher [nur während Puls], polarisierender oder spektraler Filter dämpfbar.]

Rückgekoppelter Verstärker:

Eingangsintensität I_{in} , Verstärkung des aktiven Medium [AM] G , Reflektivität von $M3$ R ; für $RG < 1$ nimmt die Intensität eines Pulses im Resonator mit der Zeit ab, für $RG = 1$ bleibt sie konstant.



Bei kontinuierlicher Einstrahlung von I_{in} stellt sich für die optische Energie im Resonator bei Kleinsignalverstärkung nach dem AM $I_{int} = \frac{[1 - R]I_{in}G}{1 - RG}$ ein.

Da die Verstärkung kohärent erfolgt, muss man jedoch Interferenz [d.h. Phase und Amplitude von E] betrachten. Ist l die optische Weglänge eines Umlaufs im Resonator, so heißt $\tau_R = \frac{l}{c}$ Umlaufzeit. Für $l \gg \lambda$ gilt, dass der Abstand benachbarter Frequenzen geführter „longitudinaler Moden“ $\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{l}$ ist [sehr klein \sim pm für $\lambda \sim 1 \mu\text{m}$ und $l \sim 1 \text{m}$].

LASER: „Optischer Resonator mit mindestens einer entdämpften Mode.“

Ratengleichung:

[alle Prozesse vollkommen homogen und somit als ortsunabhängig idealisiert]

Mit der Photonenlebensdauer τ_{ph} , dem Wirkungsquerschnitt $\sigma = \sigma_{\nu_0}$, der Photonendichte $p = p(\nu_0)$, $\Gamma = S_{21}$, $\eta = S_{32}$, der Pumprate $W_p = \eta W_{13}$ und

3-Niveau-System: $\gamma = 2$, $n_{tot} = N_1 + N_2$, $n = N_2 - N_1$, $N_3 \approx 0$;

4-Niveau-System: $\gamma = 1$, $n_{tot} = N_0 + N_2$, $n = N_2$, $N_1 \approx 0$, $N_3 \approx 0$;

Inversionsdichte: $\frac{dn}{dt} = -\gamma\sigma c p n - \Gamma[n + n_{tot}[\gamma - 1]] + W_p[n_{tot} - n]$, Photonendichte: $\frac{dp}{dt} = [\sigma c n - \frac{1}{\tau_{ph}}]p + S$.

Laser-Schwelle: $\frac{dp}{dt} \geq 0 \Rightarrow n \geq n_{th} = \frac{1}{\sigma c \tau_{ph}}$. [th - threshold, $\underbrace{\sigma}_{\text{Fläche}} \underbrace{c \tau_{ph}}_{\text{Länge}}$ - Stoßzylinder]

Im stationären Betrieb: $\frac{dn}{dt} = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$ und $S \approx 0$; die größte mögliche Verstärkung [Kleinsignalverstärkung] $g_0 = \sigma n_0$ mit der größtmöglichen Inversion [Kleinsignalinversion] $n_0 = n_{tot} \frac{W_p - \Gamma[\gamma - 1]}{W_p + \Gamma}$. Mit $I = ch\nu p$ ist

$n(I) = n_0 \frac{1}{1 + \frac{I}{I_{sat}}}$, $I_{sat} = \frac{[W_p + \Gamma]h\nu}{\gamma\sigma}$. Für die Photonendichte ergibt sich $p = \frac{\tau_{ph}}{\gamma} [W_p[n_{tot} - n_{th}] - \Gamma[\gamma - 1]n_{tot} + n_{th}]$.

Ausgangsleistung 4-Niveau Linearresonator [Verluste L , Transmission T , Volumen V , Pumpleistung P_p , Schwellpumpleistung $P_{th} = n_{tot} V h \nu_{03} \frac{\Gamma n_{th}}{\eta[n_{tot} - n_{th}]}$, Quanteneffizienz $\eta = S_{32}$], σ_s - differentieller Wirkungsquerschnitt.

$$P_{out} = \underbrace{\eta \frac{\nu_{21}}{\nu_{03}} \frac{T}{T + L}}_{=\sigma_s} \underbrace{[P_p - P_{th}]}_{\bar{p}} \quad \text{[nur für } P_p > P_{th}\text{].}$$

Für kleine Abweichungen vom GG [$n = n_{th} + \Delta n$, $p = n_{tot} [W_p - W_{th}] \tau_{ph} + \Delta p$, $n_{th} \ll n_{tot}$, $\frac{dn_{th}}{dt} = 0 = \frac{d\bar{p}}{dt}$, $W_{th} := \Gamma \frac{n_{th}}{n_{tot}}$]

ergibt sich eine gedämpfte Schwingung $\frac{d^2 \Delta n}{dt^2} + \underbrace{\Gamma \frac{W_p}{W_{th}}}_{2\delta} \frac{d\Delta n}{dt} + \underbrace{\frac{\Gamma}{\tau_{ph}} \left[\frac{W_p}{W_{th}} - 1 \right]}_{\omega_0^2} \Delta n = 0$.

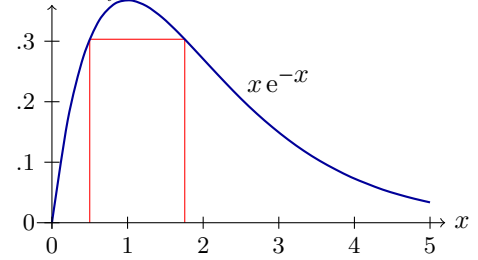
Für $\delta^2 < \omega^2 \Rightarrow \Delta n(t) = \Delta n_{\max} e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t)$. \rightarrow Relaxationsoszillationen [vorallem in Festkörperlaser].

Spiking: Nichtlineare Einschwingvorgänge beim Einschalten [FK-Laser, nicht Gas-Laser].

Güteschaltung: Güte-/Qualitätsfaktor $Q \propto \frac{\text{Im Resonator gespeicherte Energie}}{\text{Energieverluste je Umlauf}}$.

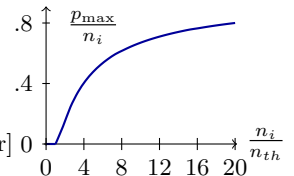
Im GG für $t < 0$ mit $\tau_{ph} = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \tau'_{ph} & , t \geq 0 \end{cases}$, so ist die erzeugbare Inversion $[n_{th} = \frac{1}{\sigma c \tau_{ph}} = \begin{cases} \infty & , t < 0 \\ \frac{1}{\sigma c \tau'_{ph}} & , t \geq 0 \end{cases}]$ sehr groß, ohne dass es lased. Nach $t = 0$ wird nun das erste spontan emittierte Photon sehr stark verstärkt, es ergibt sich [falls $n(t)$ monoton fallend, $n_i = n(t = 0)$ - initial, $n_f = n(t = \infty)$ - final]: $p(t) = n_{th} \ln(\frac{n}{n_i}) - [n - n_i] + p_i$.
 Mit $p_i \approx 0, p_f \approx 0, x = \frac{n_f}{n_{th}}$ und $y = \frac{n_i}{n_{th}}$ gilt dann $x e^{-x} = y e^{-y}$.

Inversion fast vollständig abgebaut [$n_f \rightarrow 0$], falls Anfangsinversion [$n_i \rightarrow n_{\max}$] ausreichend hoch.



Pulsenergie: $E_{\text{out}} = \frac{VT}{2\sigma l} \ln\left(\frac{n_i}{n_f}\right) h\nu$.
 [V-AM-Volumen, T-Spiegeltransmission, l-Resonatorlänge, σ -Wirkungsquerschnitt, ν -Frequenz]

Maximale Photonendichte [bei $n = n_{th}$ ist $\frac{dp}{dt} = 0$]: $p_{\max} = n_{th} \ln\left(\frac{n_{th}}{n_i}\right) - [n_{th} - n_i]$.

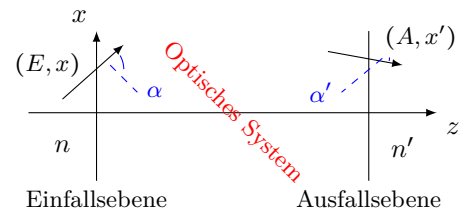


Strahldichte / Helligkeit = $\frac{\text{Leistung}}{\text{Flächenelement} \cdot \text{Raumwinkel}}$ [Raumwinkel in Steradian sr]
 [Beispiele aktiver Güteschaltungen: Pockels-Zelle [$l_{\frac{\lambda}{4}}$ + Spiegel], Akusto-optischer Modulator [AOM], Frustrierte innere Totalreflexion [FTIR]; passive Güteschaltung [Intensitätsschwelle]]

Matrizenoptik:

In paraxialer Näherung [$\sin(\alpha) \approx \alpha$]:

$$\begin{pmatrix} x' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}$$



Translationsmatrix [Freiraum]: $M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Dünne Linse [Brennweite f]: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$;

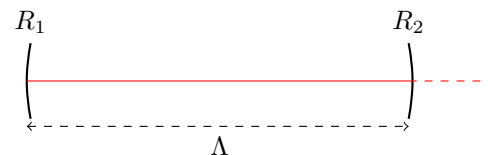
Sphärischer Spiegel [Radius R]: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$ Grenzschicht [von n_1 zu n_2]: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$.

Für optische Systeme gilt dann: $M_{\text{ges}} = M_N M_{N-1} \dots M_1$, wobei $\det(M) = \frac{n}{n'}$.

Optische Resonatoren:

Fabry-Perot:

2 gegenüber stehende Spiegel mit gemeinsamer optischer Achse.



axiale / longitudinale Eigenfrequenz: $\lambda = \frac{2\Lambda}{q}$, $q \in \mathbb{N}$.

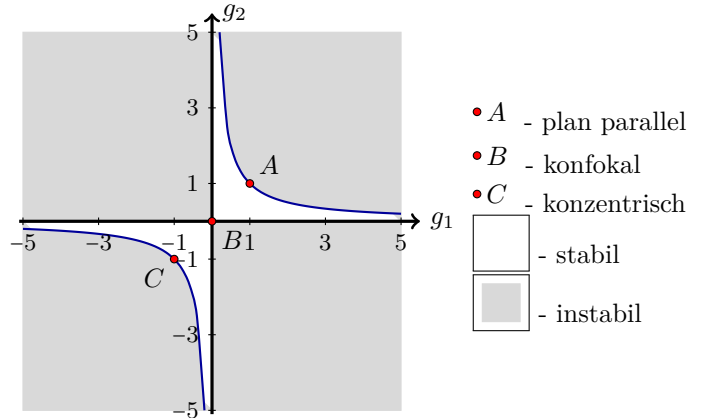
Durch Auffalten des Resonators im Matrixformalismus mit $r_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} r_i$ und $g_i := 1 - \frac{\Lambda}{R_i}$ lassen sich n Umläufe wie

folgt beschreiben: $r_n = \begin{pmatrix} 2g_1 g_2 - 1 & 2g_2 \\ 2g_1 [g_1 g_2 - 1] & 2g_1 g_2 - 1 \end{pmatrix}^n r_0$.

Durch Betrachtung der Eigenwerte und -Vektoren dieser Gleichung für $n = 1$ sieht man, dass für $[g_1, g_2] \in [0, 1]$ die Eigenwerte [mit $\theta = \arccos(2g_1g_2 - 1)$] $\lambda_{a,b} = \cos(\theta) \pm i|\sin(\theta)|$ sind und somit betragsmäßig immer 1 \Rightarrow stabil.

Für $[g_1 \cdot g_2] \notin [0, 1]$ sind $\lambda_{a,b}$ reell und jeweils einer ist mindestens betragsmäßig $> 1 \Rightarrow$ Divergenz.

[instabil aber homogenes Strahlungsfeld im Resonatorvolumen]



Thermische Linse:

für einen Zylinder der Länge L und Radius r_0 [V Volumen] ergibt sich im GG $T(r) = T(r_0) + \frac{P_T}{4VK} [r_0^2 - r^2]$ [$\Rightarrow \Delta n_T = \frac{dn}{dT} \Delta T$, K thermische Leitfähigkeit, P_T eingebrachte Wärmeleistung]. Mit dem photoelastischen Effekt [$\Delta n_p = -\frac{1}{2}n^3(0) \frac{\alpha P_T}{VK} Cr^2$, α Expansionskoeffizient, C elasto-optischer Koeffizient] zusammen $n(r) = n(0) + \Delta n_T(r) + \Delta n_p(r)$.

Dies wirkt wie eine Gradientenindexlinse mit Brennweite $f_{r,\varphi} = \frac{KV}{P_T L} \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{dn}{dT} + n^3(0)\alpha C_{r,\varphi}}$.

Fabry-Perot-Resonator mit ∞ großen Spiegeln:

Spiegelabstand L , linear polarisierte, ebene Welle der Kreisfrequenz ω , Spiegelreflektivitäten R_1, R_2 dann ergibt sich

[mit $\delta = \frac{1}{2}\omega \frac{2L}{c}$, $R = \sqrt{R_1 R_2}$, $\Gamma^2 = \frac{[1-R]^2}{R}$]: $\frac{I}{I_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\Gamma^2} \sin^2(\delta)}$ [Airy-Funktion]

Longitudinale Eigenfrequenzen: $\nu_m = m \frac{c}{2L}$, $m \in \mathbb{N}_0$.

[Finesse: $F = \frac{\text{free spectral range}}{\Gamma} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$]

Bei transversal endlich ausgedehnten Spiegeln Beugungsverluste \rightarrow transversale Moden.

Konfokal \rightarrow kleinste Beugungsverluste; plan-plan \rightarrow größte Beugungsverluste. Fresnel-Zahl: $N_F = \frac{r^2}{\lambda L}$.

Wellenoptik:

Wellengleichung [$c_n = \frac{c_0}{n}$] $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c_n^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$,

Helmholtzgleichung [skalar, monochromatisch: $\vec{E}(x, y, z, t) = u(x, y, z) e^{i\omega t}$, $k = \frac{\omega}{c_n}$] $\Delta u + k^2 u = 0$,

paraxiale Helmholtzgleichung [$u = \Psi(x, y, z) e^{-ikz}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial \Psi}{\partial z}$] $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$.

Fundamentale **Gauß**-Mode: $E(x, y, z, t) = \Psi_0 e^{i[\omega t - kz]} \frac{w_0}{w(z)} e^{i\Phi} e^{-i \frac{kr^2}{2R(z)}} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}}$, [TEM₀₀]

mit der Rayleigh-Länge $z_R = \frac{\pi}{\lambda} w_0^2$, dem Phasenflächenkrümmungsradius $R(z) = z + \frac{z^2}{z_R}$, dem Tallienradius

$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left[\frac{z}{z_R}\right]^2}$ [Abfall der Amplitude auf $\frac{1}{e}$] und der Gouy-Phase $\Phi = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$ [$k = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ mit $\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$].

Öffnungswinkel $\theta = \arctan\left(\frac{w(z)}{z}\right) \approx \arctan\left(\frac{w_0}{z_R}\right)$ für große z .

In Praxis Abweichung: $\theta \approx M^2 \frac{w_0}{z_R}$

[kleine Winkel θ]

Strahlparameterprodukt: $spp = \theta w_0 \approx \frac{w_0^2}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi}$ für einen fundamentalen Gaußstrahl.

In einem Resonator der Länge $L = L_1 + L_2$ mit Spiegeln mit Krümmungsradien R_1, R_2 ergibt sich $[g_i = 1 - \frac{L}{R_i}]$

$$L_1 = g_2[1 - g_1] \frac{L}{G} \quad , \quad L_2 = g_1[1 - g_2] \frac{L}{G} \quad , \quad z_R^2 = g_1 g_2 [1 - g_1 g_2] \frac{L^2}{G^2} \quad , \quad G = g_1 + g_2 - 2g_1 g_2 \quad .$$

Höhere Moden stark geometrieabhängig:

- rechteckig: TEM_{mn} mit $I_{mn} \propto H_m^2\left(\frac{x}{w}\right) H_n^2\left(\frac{y}{w}\right) e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2}}$ [H_o - Hermite-Polynom o -ter Ordnung]
 $w_{x,m} = \bar{w}\sqrt{2m+1} \quad , \quad w_{y,n} = \bar{w}\sqrt{2n+1} \quad , \quad \theta_{x,m} = \bar{\theta}\sqrt{2m+1} \quad , \quad \theta_{y,n} = \bar{\theta}\sqrt{2n+1}$

- zirkular: TEM_{pl} mit $I_{pl} \propto \left[\frac{2r^2}{w^2}\right]^l L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \cos^2(l\varphi) e^{-2\frac{r^2}{w^2}}$ [L_p^l - zugeordnete Laguerre-Polynome]
 $w_{pl} = \bar{w}\sqrt{2p+l+1} \quad , \quad \theta_{pl} = \bar{\theta}\sqrt{2p+l+1}$ mit $\bar{w}, \bar{\theta}$ von TEM_{00}

- Außerdem longitudinale Moden [q].

Aus Phasenunterschied von 2π für einen Resonatorumlauf ergibt sich $\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[q + \frac{1}{\pi} [m+n+1] \arccos(\sqrt{g_1 g_2}) \right]$.

Modenselektion:

Gaußsche Grundmode weist geringste Divergenz, höchste Leistungsdichte, „glattes“ Profil auf \Rightarrow gewünscht.

transversale Modenselektion: Blenden, Resonatoranpassung, Pumpspotanpassung, AM-Anpassung.

longitudinale Modenselektion: Ringresonatoren [zur Vermeidung räumlichen Lochbrennens], frequenzselektive Elemente [Prismen, Gitter, Fabry-Perot-Etalons,...], ...

Modenkopplung:

Viele longitudinale Moden im Resonator mit beliebiger Phasenbeziehung. Falls alle Moden konstruktiv interferieren meiste Inversion in kürzester Zeit abgebaut \rightarrow sehr kurzer Puls.

[kürzest möglicher Puls bei gegebener Bandbreite: „transform-limitierter Puls“]

Zeit-Bandbreite-Produkt: Rechteck-Puls: $t_P \delta_\nu = 0,886$, Gauss-Puls: $t_P \delta_\nu = 0,44$, Sech-Puls: $t_P \delta_\nu = 0,315$.

Dazu:

- aktive Modenkopplung [z.B. durch Amplitudenmodulation [Erzeugung von Seitenbändern und so Synchronisation aller Longitudinal-Moden] oder Phasenmodulation [instantane Frequenz aus Verstärkungsbandbreite für ungewollte Frequenzen]]
- passive Modenkopplung [Güteschaltung [wobei jetzt Relaxationszeit wesentlich kleiner als Resonatorumlaufzeit; z.B. SESAM] oder Kerr-Linsen-Modenkopplung [intensitätsabhängiger Brechungsindex führt zu intensitätsabhängiger Selbstfokussierung \rightarrow durch Blenden dann Güte einzelner Moden variiert]]