

Abbildungsgleichung (für dünne Linsen): $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$, Abbildungsmaßstab: $A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$.

Linsenschleiferformel (n_1 - umgebendes Medium, n_2 - Linse, R_1, R_2 - Krümmungsradien, d - Dicke auf optischer Achse):

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{[n_2 - n_1] d}{n_2 R_1 R_2} \right]$$

Maxwellsche Gleichungen (makroskopisch)

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{E}(\vec{r}, t)) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 & \text{rot}(\vec{H}(\vec{r}, t)) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \vec{j}(\vec{r}, t) \\ \text{div}(\vec{D}(\vec{r}, t)) &= \tilde{\rho}(\vec{r}, t) & \text{div}(\vec{B}(\vec{r}, t)) &= 0 \end{aligned}$$

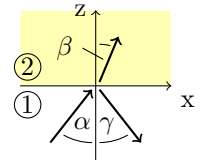
Energiedichte: $w = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$; Energieströmung: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Wellengleichung ($\vec{j}(\vec{r}, t) = 0, \tilde{\rho}(\vec{r}, t) = 0$): $[\Delta - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \Phi(\vec{r}, t) = 0$.

Lösungen sind harmonische ebene Wellen [o.B.d.A.] : $\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{H}_0 e^{i[\vec{k}\vec{r} - \omega t]})$, $\vec{H}_0 = \begin{pmatrix} H_{0x} e^{i\delta_x} \\ H_{0y} e^{i\delta_y} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$.

Abhängig vom Verhältnis von H_{0x} zu H_{0y} und dem Phasenabstand $\delta_x - \delta_y$ ergibt sich (der Bewegung des \vec{H} -Feldvektors in der Normalenebene zur Ausbreitungsrichtung entsprechend) entweder elliptisch, zirkular oder linear **polarisiertes** Licht.

Daher heißt \vec{H} **Polarisationsvektor** ; \vec{E} heißt **Schwingungsvektor** .



Reflexionsgesetz: $\sin(\alpha) = \sin(\gamma)$; **Brechungsgesetz:** $n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$.

Fresnel'sche Formeln:

Amplituden der transversal-elektrische Wellen

$$R_{\perp} = \frac{E_{\text{reflektiert},\perp}}{E_{\text{eingestrahlt},\perp}} = \frac{\cos(\alpha) - \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} \cos(\beta)}{\cos(\alpha) + \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} \cos(\beta)} \quad T_{\perp} = \frac{E_{\text{transmittiert},\perp}}{E_{\text{eingestrahlt},\perp}} = \frac{2 \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} \cos(\beta)}$$

Amplituden der transversal-magnetische Wellen

$$R_{\parallel} = \frac{E_{\text{reflektiert},\parallel}}{E_{\text{eingestrahlt},\parallel}} = \frac{\cos(\alpha) - \frac{n_1 \mu_2}{n_2 \mu_1} \cos(\beta)}{\cos(\alpha) + \frac{n_1 \mu_2}{n_2 \mu_1} \cos(\beta)} \quad T_{\parallel} = \frac{E_{\text{transmittiert},\parallel}}{E_{\text{eingestrahlt},\parallel}} = \frac{2 \frac{n_1 \mu_2}{n_2 \mu_1} \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + \frac{n_1 \mu_2}{n_2 \mu_1} \cos(\beta)}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

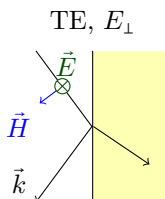
Totalreflexion: [$n_1 > n_2$, kommend aus 1]

$$\sin(\alpha_{\text{Grenz}}) = \frac{n_2}{n_1} \quad , \quad \cos(\beta) = \underbrace{i \sqrt{\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha_{\text{Grenz}})} - 1}}_{=\delta} \Rightarrow \vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{i[k_2 \sin(\beta) x - \omega t]} e^{-k_2 \delta z}$$

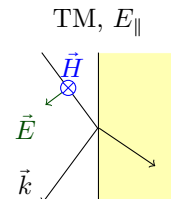
Im zeitlichen Mittel nach 2 transportierte Energie: $\overline{S}_z = 0$. Phasensprünge: $\varphi_{\perp} = \arctan(\frac{n_2 \delta}{\cos(\alpha)})$, $\varphi_{\parallel} = \arctan(\frac{n_1 \delta}{\cos(\alpha)})$;

mit $\Psi = 2[\varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp}] \Rightarrow$ Polarisationsänderung gemäß: $\tan(\frac{\Psi}{2}) = \frac{\cos(\alpha) \sqrt{\sin^2(\alpha) - [\frac{n_2}{n_1}]^2}}{\sin^2(\alpha)}$.

Feldstruktur in Medium 1: $\vec{E}_1 = 2\vec{E}_0 e^{i[kx \sin(\alpha) - \omega t] - i\varphi_{\perp}} \cos(kz \cos(\alpha) + \varphi_{\perp})$.



Das \parallel und \perp sind relativ zur vom einfallenden \vec{k} und dem Flächennormalenvektor aufgespannten Ebene benannt.



Brewster'sche Gesetz: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \tan(\alpha_{\text{Brewster}}) = \frac{n_2}{n_1}$ [kommend aus 2, $n_2 > n_1$]; dann ist $R_{\parallel} = 0$!

Wellenleiter:

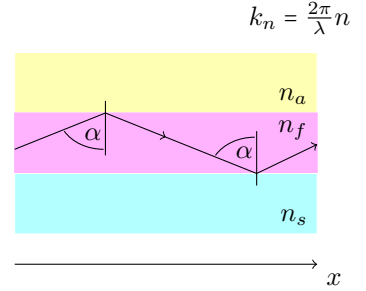
mit $n_f > n_s \geq n_a$, $\alpha > \alpha_{G_s}$, $\alpha > \alpha_{G_a}$, dann durch Totalreflexion geführte Welle mit konstruktiver Interferenz mit sich selbst im Wellenleiter bei:

$$2 \frac{2\pi}{\lambda} n_f d \cos(\alpha) - 2\varphi_a - 2\varphi_s = m 2\pi .$$

Daraus ergibt sich ein diskreter Modensatz mit m_{\max} [jeweils für TM und TE].

Als grobe Abschätzung ergibt sich (unter Vernachlässigung der Phasenterme):

$$m \lesssim \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n_f^2 - n_s^2}, \quad m \in \mathbb{N} .$$



Ausgehend vom Modell einer harmonischen Schwingung von Elektronen im Atom ($m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} = -e\vec{E} - e\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$, $\dot{\vec{r}} \ll c$), der Oszillatorstärke f_k [Anteile der e^- mit ω_k] und einer linearen Response des Mediums ($\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}$) erhält man die

Lorenz-Lorentz-Gleichung:
$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_k}$$

N - e^- -Dichte
 m - Masse
 ω - Frequenz des äußeren Feldes
 γ_k - Dämpfungskonstante

Man spricht von: normaler Dispersion: $\frac{dn}{d\omega} > 0$; anomaler Dispersion: $\frac{dn}{d\omega} < 0$.

Wellengruppe:
$$\Psi(x, t) = \int_0^\infty A(x, \omega) e^{i[kx - \omega t]} d\omega \quad \text{mit } k = n(\omega) \frac{\omega}{c} .$$

Für Quasimonochromasie [$\Delta\omega \ll \omega_0$]: $k(\omega) \approx \underbrace{k(\omega_0)}_{k_0} + \underbrace{\frac{dk}{d\omega}|_{\omega=\omega_0}}_{\frac{1}{v_{Ph}}} [\omega - \omega_0] + \dots$, mit $A(x, \omega) = \begin{cases} A_0 & \omega \in \Delta\omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ gilt :

$$\Psi(x, t) = A_0 \text{sinc} \left(\left[\frac{1}{v_{Ph}} x - t \right] \frac{\Delta\omega}{2} \right) \Delta\omega e^{i[k_0 x - \omega_0 t]} .$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist dann:
$$v_{Gr} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} = \frac{c}{n(\omega_0) + \omega_0 \left. \frac{dn}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}}$$

$n = \text{Re}(\hat{n})$ - Phasengeschwindigkeit beeinflusst [$v_{Ph} = \frac{c}{\text{Re}(\hat{n})}$]; $\kappa = \text{Im}(\hat{n})$ - Absorption.

Telegraphengleichung: [in isotropen, homogenen Medien, mit $\mu(\omega) = \text{const.}$, $\epsilon(\omega)$, $\sigma(\omega)$ und $\vec{j} = \sigma\vec{E}$]

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\mu\sigma\dot{\vec{E}} - \mu_0\mu\epsilon_0\epsilon\ddot{\vec{E}} = 0$$

Für ebene, monochromatische Wellen folgt die Dispersionsgleichung für Wellenleiter: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu\epsilon \left[1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon\omega} \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{n}^2$,

mit $\hat{n} = n + i\kappa \Rightarrow \kappa = \pm \sqrt{-\frac{\epsilon\mu}{2} + \sqrt{\left[\frac{\epsilon\mu}{2}\right]^2 + \left[\frac{\mu\sigma}{2\epsilon_0\omega}\right]^2}}$ und $n = \pm \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} + \sqrt{\left[\frac{\epsilon\mu}{2}\right]^2 + \left[\frac{\mu\sigma}{2\epsilon_0\omega}\right]^2}}$.

\Rightarrow Eine in Ausbreitungsrichtung [o.B.d.A. x] gedämpfte ebene Welle: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left[\frac{\omega}{c}nx - \omega t\right]} e^{-\kappa x \frac{\omega}{c}}$.

Die Eindringtiefe [Intensität auf $\frac{1}{e}$] ergibt sich zu: $x_T = \frac{c}{2\omega\kappa}$.

In Metallen ergibt sich über den Ansatz $m\ddot{\vec{r}}_k = -e\vec{E}_k - \dot{\vec{r}}_k m\gamma \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$ (γ - Dämpfung, \vec{E}_k elektrisches Feld an e^-_k), mit der Stromdichte $\vec{j} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^M [-e]\dot{\vec{r}}_k$ und einem mittleren Feld \vec{E} : $m\dot{\vec{j}} = \underbrace{\frac{M}{V}}_N e^2 \vec{E} - \gamma m \vec{j}$.

Im stationären Fall ($\dot{j} = 0$) gilt also: $\vec{j} = \underbrace{\frac{Ne^2}{\gamma m}}_{\sigma_0} \vec{E}$. Die Dämpfungszeit ist dann: $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma_0}{Ne^2}$.

Und daraus mit $\vec{E} \sim e^{-i\omega t}$ und $\vec{j} \stackrel{!}{=} \sigma(\omega)\vec{E}$: $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$.

Mit $\hat{n}^2 = \mu\hat{\epsilon}$ ergibt sich: $\hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega} \stackrel{\omega\tau \gg 1}{\approx} \epsilon - \frac{\sigma_0}{\omega\epsilon_0[\omega\tau]} + i\frac{\sigma_0}{\omega\epsilon_0[\omega\tau]^2} + \dots$

$\Rightarrow \omega$ groß, so gibt es keine Absorption; Plasmonfrequenz [$\text{Re}(\hat{\epsilon}) = 0$]: $\omega_p = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\epsilon_0\epsilon\tau}} = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0\epsilon}}$.

Dispersionsrelationen (Kramers-Kronig-Relationen):

Nimmt man einen linearen Zusammenhang $\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega)$, mit $\chi = \chi_1 + i\chi_2$ an, so ergibt sich über den Residuensatz:

$$\chi_1(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \chi_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \qquad \chi_2(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\chi_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Mit $\chi(\omega) = \epsilon(\omega) - 1 = \hat{n}^2(\omega) - 1 = n^2(\omega) - \kappa^2(\omega) - 1 + i2n(\omega)\kappa(\omega)$ und einigem Umformen ergibt sich:

$$n(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \kappa(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \qquad \kappa(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{n(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Geometrische Optik:

Aus der Annahme eines skalaren, harmonischen Feldes ergibt sich mit dem Ansatz $f(\vec{r}) = a(\vec{r}) e^{i\frac{\omega}{c}L(\vec{r})}$ aus der zeitfreien Wellengleichung $\Delta f + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$ die Eikonalgleichung: $[\nabla L]^2 = n^2$.

Fermat'sches Prinzip:

Das Licht wählt auf dem Weg von einem Punkt S zu einem Punkt P immer einen extremalen Weg s : $\delta \left[\int_S^P n(\vec{r}) ds \right] = 0$.

Differentialgleichung für Strahlengang: $\text{grad}(n) = \frac{d}{ds} \left[n \frac{d\vec{r}}{ds} \right]$

Ein Spiegel vertauscht nur Vorne und Hinten!

Strahlen = orthogonale Trajektorien der Wellenfronten.

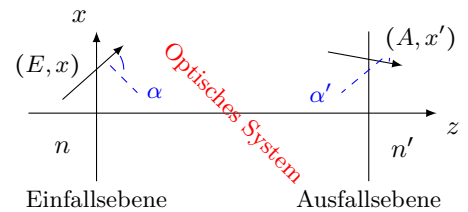
In homogenen, isotropen Medien bilden Lichtstrahlen gerade Linien.

Korrespondierende Punkte = Punkte, in denen ein einzelner Strahl eine Reihe von Wellenfronten schneidet.

Matrixformalismus:

In paraxialer Näherung [$\sin(\alpha) \approx \alpha$].

$$\begin{pmatrix} x' \\ n'\alpha' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}$$



Translationsmatrix [Freiraum]: $M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Dünne Linse [Brennweite f]: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$;

Sphärischer Spiegel [Radius R]: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix}$ [Aufspalten des Lichtweges!].

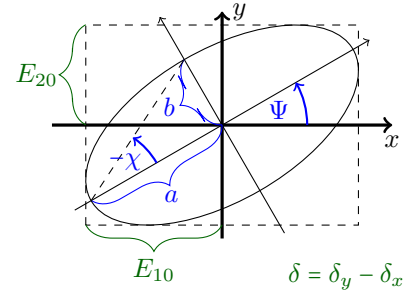
Für optische Systeme gilt dann: $M_{\text{ges}} = M_N M_{N-1} \dots M_1$, wobei $\det M = \frac{n}{n'}$.

Mit diesem Ansatz ergibt sich für einen sphärischen Resonator die **Resonatorbedingung**: $0 \leq \left[1 - \frac{L}{R_1}\right] \left[1 - \frac{L}{R_2}\right] \leq 1$.

Polarisation:

- polarisiertes Licht: es existiert ein reiner Polarisationszustand [linear, zirkular, ellipstisch].
- unpolarisiertes Licht: nicht eindeutig zerlegbar in reine Polarisationszustände.
- teilweise polarisiertes Licht: eindeutig zerlegbar in einen reinen und einen unpolarisierten Anteil.

Beschreibung polarisierten Lichts über Polarisationsellipse [Lage im Raum, Azimutwinkel Ψ [$-\frac{\pi}{2} \leq \Psi \leq \frac{\pi}{2}$], Amplitudenverhältnis $\frac{E_{20}}{E_{10}} = \tan(\alpha)$, Umlaufsinn, Phasenunterschied δ , Elliptizität $e = \pm \frac{b}{a} = \tan(\chi)$.
 Es gilt $a^2 + b^2 = E_{10}^2 + E_{20}^2$.
 $\tan(2\Psi) = \tan(2\alpha) \cos(\delta)$
 $\sin(2\Psi) = \sin(2\alpha) \sin(\delta)$



Stokes-Parameter [für ebene, monochromatische Wellen!]:

$$s_0 = E_{10}^2 + E_{20}^2, \quad s_1 = E_{10}^2 - E_{20}^2, \quad s_2 = 2E_{10}E_{20} \cos(\delta), \quad s_3 = 2E_{10}E_{20} \sin(\delta).$$

Dies ist äquivalent zu:

[→ Poincaré-Kugel]

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad s_1 = s_0 \cos(2\chi) \cos(2\Psi), \quad s_2 = s_0 \cos(2\chi) \sin(2\Psi), \quad s_3 = s_0 \sin(2\chi).$$

Polarisationsgrad: P - Anteil der Intensität des vollständig polarisierten Lichts an der Gesamtintensität.

Jones-Kalkül [für ebene, monochromatische Wellen; planparallele Bauelemente!]:

$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{10} e^{i\delta_1} \\ E_{20} e^{i\delta_2} \end{pmatrix}$ mit Propagation gemäß $\begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix}$ [T - Jones-Matrix; u.U. Drehung: $T' = D(\varphi)TD(-\varphi)$ mit $D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$]. Für N Bauteile gilt dann: $\vec{E}_{\text{out}} = T_N T_{N-1} \dots T_1 \vec{E}_{\text{in}}$.

Translationsmatrix [isotropes, homogenes Medium (Brechungsindex n , Dicke d): $T = \begin{pmatrix} e^{-i \frac{2\pi n d}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{2\pi n d}{\lambda}} \end{pmatrix}$;

Polarisationsfilter: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; Phasenplättchen: $T = \begin{pmatrix} e^{-i\Phi_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi_2} \end{pmatrix}$.

Mueller-Matrizen:

mit den Stokesvektoren $\vec{S} = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ kann man die Polarisation von Licht wie folgt beschreiben: $\vec{S}' = \underbrace{(m_{ij})}_{\text{Mueller-Matrix}} \vec{S}$.

$\hat{M} = (m_{ij})$ hat 16 reelle Elemente [ohne Depolarisation 7 unabhängige], nicht zu jeder Matrix gibt es ein Bauelement, Intensität explizit enthalten, Streuung behandelbar, keine Phaseninformation .

Polarisationsfilter [horizontal]: $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen [horizontale schnelle Achse]: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Kohärenzmatrix:

sei $E_z = 0$, $E_j(t) = \underbrace{a_j(t)}_{\text{Quasimonochromasie!}} e^{i[\Phi_j(t) - \omega_0 t]}$, $j \in \{x, y\}$

Quasimonochromasie!

$\xrightarrow[\text{Polarisator}]{\text{Kompensationsplatte } [\Phi_j \rightarrow \varepsilon_j + \Phi_j]}$ $E(\Theta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, t) = E_x(t) e^{i\varepsilon_1} \cos(\Theta) + E_y(t) e^{i\varepsilon_2} \sin(\Theta)$

Mit $\delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ folgt: $I(\Theta, \delta) = \langle |E|^2 \rangle = J_{xx} \cos^2(\Theta) + J_{yy} \sin^2(\Theta) + J_{xy} e^{i\delta} \cos(\Theta) + J_{yx} e^{-i\delta} \sin(\Theta) \cos(\Theta)$.

Die Kohärenzmatrix ist dann: $J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1^2 \rangle & \langle a_1 a_2 e^{i[\Phi_1 - \Phi_2]} \rangle \\ \langle a_1 a_2 e^{-i[\Phi_1 - \Phi_2]} \rangle & \langle a_2^2 \rangle \end{pmatrix}$ [hermitesch, $\text{tr}(J)$ - Intensität].

Mit der Normierung zum komplexen Korrelationsgrad: $j_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}J_{yy}}} = |j_{xy}| e^{i\alpha_{xy}}$ gilt: [Quasimonochromasie vorausgesetzt!]

$$I(\Theta, \delta) = \langle |E|^2 \rangle = J_{xx} \cos^2(\Theta) + J_{yy} \sin^2(\Theta) + 2|j_{xy}| \sqrt{J_{xx}J_{yy}} \sin(2\Theta) \cos(\alpha_{xy} + \delta).$$

Kristalloptik:

Annahmen: $\sigma = 0, \mu = 1, D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j$ mit ϵ_{ij} symmetrisch \Rightarrow Hauptachsensystem: $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$
 $[\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z - \text{Hauptwerte} / \text{Hauptdielektrizitätskonstanten}]$

Für ebene, monochromatische Wellen $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i[\frac{n\omega}{c} \vec{s}\vec{r} - \omega t]}$ ergibt sich:
 $\mu_0 \vec{H} = \frac{n}{c} \vec{s} \times \vec{E} \quad [\Rightarrow \vec{H} \perp \vec{s}, \vec{E}] \quad , \quad \vec{D} = -\frac{n}{c} \vec{s} \times \vec{H} \quad [\Rightarrow \vec{D} \perp \vec{s}, \vec{H}].$

Sowie: $\vec{D} = \epsilon_0 n^2 [\vec{E} - \vec{s}[\vec{s}\vec{E}]] .$

Ist $\vec{s}\vec{E} \neq 0$, so gilt die Fresnelsche Normalengleichung: $\sum_i \frac{s_i^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_i}} = 0$

Energiefluss: - Poyntingvektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{n}{c\mu_0} \vec{E} \times [\vec{s} \times \vec{E}] = \frac{n}{c\mu_0} [\vec{s}\vec{E}^2 - \vec{E}[\vec{s}\vec{E}]]$ i.Allg. nicht $\parallel \vec{s}$.

- Strahlrichtung: $\vec{t} = \frac{\vec{S}}{\|\vec{S}\|} .$

- Strahlgeschwindigkeit: $\vec{v}_s \quad ; \quad \|\vec{v}_s\| = \frac{\|\vec{S}\|}{w} = \frac{c}{n \cos(\alpha)} = \frac{v}{\cos(\alpha)} \quad [\alpha = \sphericalangle(\vec{s}, \vec{S})] .$

- Strahlenindex: $n_s = \frac{c}{v_s} .$

- Hauptgeschwindigkeit: $v_i = \frac{\sqrt{\epsilon_0 c}}{\sqrt{\epsilon_i}} .$

$$\vec{E}\vec{t} = 0$$

Es gilt: $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 n_s^2} [\vec{D} - \vec{t}[\vec{t}\vec{D}]]$

Strahlengleichung: $\sum_i \frac{t_i^2}{n_s^2 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}} = 0$

Normalenellipsoid: $\sum_{i=1}^3 \frac{D_i^2}{\epsilon_i} = const. \quad ; \quad \text{Strahlenellipsoid: } \sum_{i=1}^3 \epsilon_i E_i^2 = const. \quad [\text{bei konstantem } w!].$

Optische Achse $\hat{=}$ Richtung gleicher Normalengeschwindigkeit aller Strahlen.

- ordentlicher Strahl: $\vec{v} = \vec{v}_s$

- außerordentlicher Strahl: $\frac{\sin^2(\gamma)}{n_e^2} + \frac{\cos^2(\gamma)}{n_o^2} = \frac{1}{n^2} \quad [„Normalenfläche“, n \text{ i.A. zwischen } n_e \text{ und } n_o].$

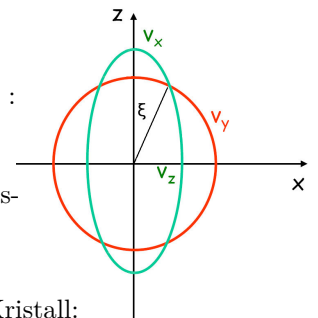
$v_0 > v_e$ - positiv einachsrig; $v_0 < v_e$ - negativ einachsrig.

Hauptschnitt: Ebene, die die optische Achse und \vec{t} enthält.

Für optisch zweiachsige Kristalle ergibt die Fresnelsche Normalengleichung $\sum_i \frac{s_i^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_i}} = 0 \quad :$

$$s_x^2 [v^2 - v_y^2] [v^2 - v_z^2] + s_y^2 [v^2 - v_x^2] [v^2 - v_z^2] + s_z^2 [v^2 - v_x^2] [v^2 - v_y^2] = 0$$

Dies beschreibt 3d zwei Ellipsoide; durch Projektion auf Hauptebenen erhält man beispielsweise das Bild rechts, in dem man die 2 optischen Achsen sieht \rightarrow Schnittpunkte).

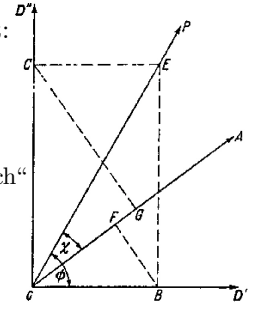


Phasendifferenz der ordentlichen und der außerordentlichen Welle in doppelbrechendem Kristall:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} [n_e - n_o] d \quad [\vec{s} \text{ senkrecht zur optischen Achse!}]$$

Hinter Polarisator [P], Kristall und Analysator [A] [in dieser Reihenfolge], gilt für die Intensität:

$$I = E^2 [\cos^2(\chi) - \sin(2\varphi) \sin(2[\varphi - \chi]) \sin^2(\frac{\Delta\Phi}{2})]$$



paralleler Strahlengang - „orthoskopisch“ ; kon-/divergierender Strahlengang - „konoskopisch“

Optisch aktive Kristalle [Heli-/Chiralität]:

Drehsinnabhängige Brechzahl: n_L, n_R ; spezifisches Drehvermögen: $\rho = \frac{\pi}{\lambda} [n_L - n_R]$;

gemittelte Werte: $\bar{n} = \frac{1}{2} [n_L + n_R]$, $\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{n} \Rightarrow k_L = \bar{k} + \rho, k_R = \bar{k} - \rho$; für ebene Welle:

$$E = E_0 e^{i\varphi_0} \frac{1}{2} [e^{-i[k_R z - \omega t]} + e^{i[k_L z - \omega t]}] = E_0 e^{i[\varphi + z\rho]} \cos(\bar{k}z - \omega t)$$

Induzierte optische Anisotropie:

- mechanische Spannung [„Photoelastizität“/„Spannungsdoppelbrechung“] [~ 10⁻³]
- elektrisches Feld [„elektrooptischer Effekt“; genähert: $n(E) = n_0 \overbrace{-\frac{1}{2}r n_0^3 E}^{\text{Pockel-Effekt}} \overbrace{-\frac{1}{2}s n_0^3 E^2}^{\text{Kerr-Effekt}}$] [~ 10⁻²]
- magnetisches Feld [„magnetooptischer“/„Faraday-Effekt“; Drehung im longitudinalen B-Feld um Winkel $\alpha = \mathcal{V}Bd$ richtungsunabhängig → nicht-reziprok !]

Interferometrie:

Kohärenz - Fähigkeit zur Interferenz [~ Korrelation] ; Inkohärenz - statistische Beschreibung nötig.

Signal: $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu$, Spektrum: $F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi\nu t} d\nu$

Energieinhalt: $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$, Energiespektrum: $|F(\nu)|^2$
 , Leistungsdichtespektrum: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F(\nu)|^2$

Kreuzkorrelation: $\text{corr}(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t + \tau) dt$, Faltung: $[f * g](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(\tau - t) dt$

Zeitmittelwert: $\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt$, wichtig: FT $([f * g](t)) = F(\nu) \cdot G(\nu)$

Parseval-Theorem: $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$, Wiener-Khinchin-Theorem: FT $(\text{corr}(f, g)) = F^*(\nu) G(\nu)$

Korrelationsfunktion im stationären Fall: $\Gamma_{fg}(\tau) = \langle f^*(t) g(t + \tau) \rangle$
 , Korrelations-/Kohärenzgrad: $\gamma_{fg}(\tau) = \frac{\Gamma_{fg}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{ff}(0) \cdot \Gamma_{gg}(0)}}$

Quasimonochromasie: $\Delta\nu \ll \nu_0$

Intensität von $\vec{E}(\vec{r}, t)$: $I := |A|^2$, eigentlich $I = \frac{v\epsilon_0\epsilon}{2} |A|^2$.

Für 2 ebene, monochromatische Wellen $\vec{E}_i = \cos(\vec{k}_i \vec{r} - \omega_i t + \delta_i)$ gilt:

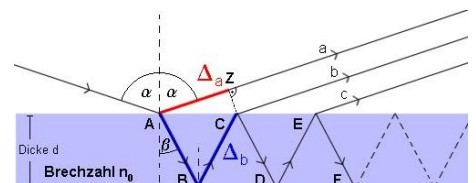
$$\langle \vec{E}_{\text{res}}^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} \begin{cases} E_{10}^2 + E_{20}^2 & , \omega_1 \neq \omega_2, \omega_i \gg \text{Messgerät} \\ E_{10}^2 + E_{20}^2 & , \omega_1 = \omega_2, \delta_1 - \delta_2 = 0, \vec{E}_1 \perp \vec{E}_2 \\ E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2 E_{10} E_{20} \cos([\vec{k}_1 - \vec{k}_2] \vec{r}) & , \omega_1 = \omega_2, \delta_1 - \delta_2 = 0, \vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2 \end{cases}$$

Im letzten Fall gilt dann: $\underbrace{I}_{\text{→Interferenz-Streifen}} = \underbrace{|\vec{A}_1 + \vec{A}_2|^2}_{\text{Gleichlichtterm}} = \underbrace{I_1 + I_2}_{\text{Gleichlichtterm}} + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos([\vec{k}_1 - \vec{k}_2] \vec{r})}_{\text{Interferogramm}}$.

Interferenz-Ordnung N [Δd - optische Wegdifferenz, λ - Wellenlänge]: $N = \frac{\Delta d}{\lambda} \in \mathbb{R}$

Sichtbarkeit: $V = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$.

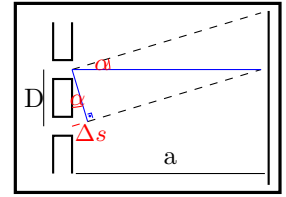
Interferenz an planparallelen Platten: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2d\sqrt{n_0^2 - \sin^2(\alpha)} + \pi$
 [Phasensprung um π beim Eintritt ins optisch dichtere Medium!]



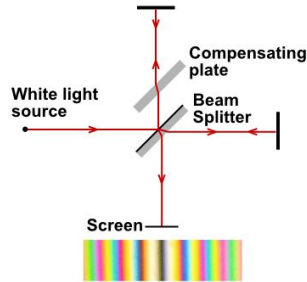
Zweistrahlinterferenzen:

Doppelspalt [Young-Interferometer]:

Wenn a - Abstand Doppelspalt-Schirm - groß gegen D - Spaltabstand - ist, so gilt in guter Näherung bei x - Auslenkung auf dem Schirm - $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x D}{a}$.



Michelson-Interferometer:



Vielstrahlinterferenzen:

Planparallele Platte:

Fresnelsche Reflexions- und Transmissionskoeffizienten R, T [$n \rightarrow n_0$ - in Platte], R', T' [$n_0 \rightarrow n$ - aus Platte], [Intensitäts-]Transmission $t = TT'$, [Intensitäts-]Reflexion $r = R^2 = R'^2$, Phasenunterschied bei einem Plattendurchlauf $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} hn_0 \cos(\beta)$; damit gilt [ohne Absorption $\rightarrow I_{\text{refl.}} + I_{\text{trans.}} = I_{\text{ein}}$]:

$$I_{\text{refl.}} = \frac{4r \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})}{[1-r]^2 + 4r \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})} I_{\text{einf.}}$$

$$I_{\text{trans.}} = \frac{t^2}{[1-r]^2 + 4r \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})} I_{\text{einf.}}$$

Für $r \approx 1$ ergibt sich die **Halbwertsbreite** [Länge des Intervalls zwischen den Punkten halber Intensität] zu: $\varepsilon = 2 \frac{1-r}{\sqrt{r}}$.

Die **Feinheit** ist $F = \frac{\text{Abstand 2er Maxima}}{\text{Halbwertsbreite}} = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}$.

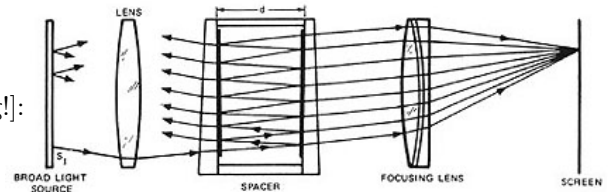
Fabry-Perot-Interferometer:

Der Durchmesser des p -ten Haidinger Rings [in erster Näherung!]:

$$D_p = \sqrt{\frac{n'\lambda}{h'} \frac{2f}{n} \sqrt{m_0 - m_p}} \quad ,$$

mit h' der Länge zwischen den Spiegeln, n' dem Brechungsindex zwischen den Spiegeln, λ der eingestrahnten Wellenlänge,

f der Brennweite der hinteren Linse, n dem Brechungsindex des äußeren Mediums, $m_p = \frac{2n'h'}{\lambda} \cos(\beta_p)$ der Ordnungszahl und β_p dem Winkel der Strahlen zwischen den Spiegeln zu einer Spiegelnormalen.



Spektrallinien:

Auflösungsvermögen: $AV = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Fm$, die Halbwertsbreite ergibt sich hier zu: $\varepsilon = \frac{2\pi m \Delta\lambda}{\lambda}$

Der Verschiebung um eine Interferenzordnung entspricht das freie Spektralgebiet : $\Delta\lambda_{\text{SR}} = \frac{\lambda_0^2}{2n'h'} = \frac{\lambda_0}{m_0} = F\Delta\lambda$ [spectral range]

Für stehende Wellen zwischen zwei Spiegeln ergeben sich Longitudinalmoden [c -Lichtgeschwindigkeit, h' -Abstand, Ψ -Phasensprung bei Reflexion]:

$$\nu = \frac{mc}{2h'} + \frac{\Psi c}{2\pi h'}$$

Der Modenabstand beträgt $\Delta\nu = \frac{c}{2h'}$

Fourierspektroskopie:

Probe der Dicke h im Michelson-Interferometer, Quelle mit $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) d\nu$, Laufzeitdifferenz $\tau = \frac{2h}{c}$; dann Signal hinter Spektrometer:

$$I(Q) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{G(\nu) [1 + \cos(2\pi\nu\tau)]}^{\text{Interferogramm}} d\nu$$

Interferogramm: $F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu$, Leistungsdichtespektrum: $G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \cos(2\pi\nu\tau) d\tau$.

Beugung:

„Unter Beugung versteht man jede Abweichung des Lichtes vom geradlinigen Strahlengange, soweit sie nicht als Spiegelung oder Brechung aufgefasst werden kann.“ [A. Sommerfeld, Optik, S.156]

Huygens-Fresnel: „Jeder Punkt einer Wellenfront ist Quelle einer sekundären Kugelwelle.“

Mit Richtungsabhängigem Neigungsfaktor K : maximal \perp zur Wellenfront [in Ausbreitungsrichtung], $0 \parallel$ zur Wellenfront [und entgegen Ausbreitungsrichtung]:

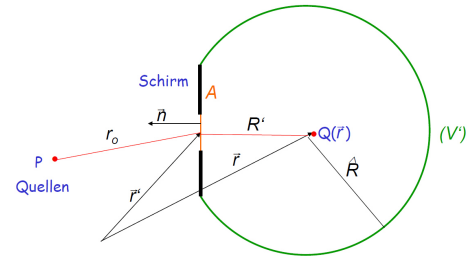
$$A_p(\vec{r}) \sim \int_{\text{Wellenfront}} \overbrace{\frac{e^{ik\vec{r}_0}}{|\vec{r}_0|}}^{\text{Primärwellen}} K(\vec{r}, \vec{r}_0) \overbrace{\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}}^{\text{Sekundärwellen}} df$$

Kirchhoff: Über die Helmholtzgleichung $[\Delta A + k^2 A = 0]$, eine Green'schen Identität $[\int_{\partial V'} [v \text{ grad}(u) - u \text{ grad}(v)] d\vec{f}' = \int_{V'} [v \Delta u - u \Delta v] dV']$ und die Green'schen Funktion $v = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ [Kugelwelle!, $\Delta v + k^2 v = -4\pi \delta(|\vec{r}-\vec{r}'|)$] ergibt sich der **Kirchhoff'sche Satz:**

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V'} \left[\text{grad}(u) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - u \text{ grad} \left(\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right] d\vec{f}'$$

Mit kirchhoffschen Randbedingungen auf dem Schirm $[u = 0, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0]$ für eine Punktquelle $[u = \frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{e^{ikr_0}}{r_0} [ik - \frac{1}{r_0}] \frac{\vec{r}_0}{r_0} \vec{n}]$ mit $\lambda \ll r', r_0$ $[ik - \frac{1}{r_0} \approx ik]$ und $\vec{R}' = \vec{r} - \vec{r}'$ gilt die kirchhoff'sche Beugungsformel:

$$u(\vec{r}) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\text{Öffnungen}} \frac{e^{ik[r_0+R']}}{r_0 R'} \left[\frac{\vec{r}_0}{r_0} - \frac{\vec{R}'}{R'} \right] \vec{n} df'$$

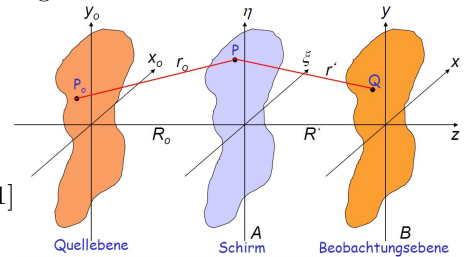


Nähert man die Öffnung mit der Wellenfront $[r_0 \gg \lambda, \text{ somit } r_0 \approx \text{const. auf Öffnung}]$ und nimmt an $\vec{n} \vec{R}' \approx |\vec{n}| |\vec{R}'| [-\cos(\theta')]$, so gilt:

$$u(R') = \frac{i}{2\lambda} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\text{Öffnungen}} \frac{e^{ikR'}}{R'} [1 + \cos(\theta')] df' \quad , \text{ somit } K = \frac{i}{2\lambda} [1 + \cos(\theta')] \quad [\text{anders als Huygens annahm!}]$$

Nähert man hingegen ebene Öffnungen, sagt $r_0 \gg \lambda$ und $\vec{n} \frac{\vec{r}_0}{r_0} - \vec{n} \frac{\vec{R}'}{R'} \approx 2 \cos(\theta')$, so gilt:

$$u(R') = \frac{i}{\lambda} \int_{\text{Öffnungen}} \frac{e^{ik[r_0+R']}}{r_0 R'} \cos(\theta') df'$$



Mit $r_0, R' \gg \lambda$ gegen Apertur, Beobachtungsgebiet und Quelle $[\Rightarrow \cos(\theta') \approx 1]$ ergibt sich das **Fresnel'sche Beugungsintegral:**

$$u(R') = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ik[R_0+R']}}{R_0 R'} \int_{\text{Öffnungen}} e^{i \frac{k}{2} \left[\frac{1}{R_0} [[x_0 - \xi]^2 + [y_0 - \eta]^2] + \frac{1}{R'} [[x - \xi]^2 + [y - \eta]^2] \right]} d\xi d\eta$$

Transmissionsfunktion einer dünnen Linse im paraxialen Fall [Dicke d_0 , Brennweite f , am Ort (x, y) auf ihr [dünne Linse \rightarrow Ebene]]:

$$T_L(x, y) = e^{ikd_0 n} e^{-i \frac{k}{2f} [x^2 + y^2]}$$

Fourieroptik:

Sind Quell- und Beobachtungsebene B nun im Abstand der Brennweite f einer **Linse** bei A und ist die Ausdehnung des Objekts klein gegen die Linsenöffnung, so ergibt sich die Transmissionfunktion zu einem **räumlichen Fourierintegral:**

$$u(x, y) \sim \iint_{\mathbb{R}^2} T_0(\xi, \eta) e^{-\frac{ik}{f} [\xi x + \eta y]} d\xi d\eta$$

Hinter mehreren Aperturen ergibt sich das Feld dann, bei Gesamapertur $T(\vec{\xi}) = \int \underbrace{T(\xi - \alpha)}_{\text{Einzelapertur}} \underbrace{\Delta(\alpha)}_{\text{Aperturlage}} d\alpha$ und einfallender ebener Welle zu [„Feldtheorem“] :

$$u(\vec{x}) \sim \iint T(\vec{\xi} - \vec{\alpha}) \Delta(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} e^{-\frac{ik}{f} \vec{\xi} \vec{x}} d\vec{\xi} \sim \text{FT}(T(\vec{x})) \text{FT}(\Delta(\vec{x}))$$

Es ergibt sich für:

- Kreisförmige Lochblende mit Radius a : $I(\rho, \alpha) \sim \left[\alpha^2 \frac{2J_1\left(\frac{ka\rho}{f}\right)}{\frac{ka\rho}{f}} \right]^2$, J_n - Besselfunktionen n -ter Ordnung, $J_1(3,83) = 0$ erste Nullstelle $\Rightarrow \rho_1 = 0,61\lambda \frac{f}{a}$
- Spalt der Breite $2a$ in η und $2b$ in ξ : $I(x, y) \sim [4ab]^2 \text{sinc}^2\left(\frac{kax}{f}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{kby}{f}\right)$
- Doppelspalt mit Spaltbreiten $2a$ und Spaltmittenabstand $2b$ in x -Richtung: $I(x) \sim a^2 \text{sinc}^2\left(\frac{kax}{f}\right) \cos^2\left(\frac{kbx}{f}\right)$
- Gitter aus N Spalten der Breite $2a$ mit Spaltmittenabstand Λ in x -Richtung: $I(x) \sim \text{sinc}^2\left(\frac{kax}{f}\right) \left[\frac{\sin\left(\frac{kN\Lambda x}{2f}\right)}{\sin\left(\frac{k\Lambda x}{2f}\right)} \right]^2$

Bei Bestrahlung eines Reflexionsgitters $[\vec{K} = \frac{2\pi}{\Lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$ unter α $[\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}]$ und Betrachtung unter β $[\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}]$ zur Gitternormalen, so gilt für konstruktive Interferenz die Gittergleichung [$m \in \mathbb{Z}$]:

$$-\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = m\vec{K}$$

Der freie Spektralbereich $\Delta\lambda_{SR} \geq \lambda_m - \lambda_{m-1} = \frac{\lambda_{m-1}}{m} = \frac{\lambda_{m-1}\lambda_m}{\Lambda[\sin(\alpha) + \sin(\beta)]}$ beschreibt den Bereich, in dem keine Überlapung der Spektren unterschiedlicher Ordnung auftritt.

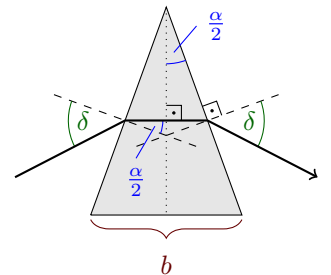
Winkeldispersion: $\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{\Lambda \cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{\lambda \cos(\beta)}$

Bei inkohärenter Beleuchtung und für kleine Winkel [paraxial] ergibt sich das Auflösungskriterium nach Rayleigh [0. Beugungs-Maximum der nächsten Interferenz-Ordnung weiter weg als das erste Beugungs-Nebenmaximum der gleichen Interferenz-Ordnung] hinter einem Gitter [-> Einhüllende!] zu:

$$AV = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{L[\sin(\alpha) + \sin(\beta)]}{\lambda}$$

Für ein Prismenspektrometer mit einem gleichschenkligen Prisma der Grundlänge b , einfallendem parallelen Bündel und symmetrischem Strahlengang [$n \sin(\frac{\alpha}{2}) \stackrel{!}{=} \sin(\delta)$] ergibt sich für das Auflösungsvermögen:

$$AV = b \frac{dn}{d\lambda}$$



Mikroskop:

Für inkohärente Beleuchtung: $\Delta x_{\min} = \frac{0,61\lambda}{\beta}$, Abbesche Sinusbedingung $x_0 n \sin(\alpha) = x n' \sin(\beta)$, $n' = 1$ und in paraxialer Näherung ergibt $\Delta x_{0 \min} = \frac{0,61\lambda}{n \sin(\alpha)}$.

numerische Apertur: $n \sin(\alpha)$

Für kohärente Beleuchtung und Kosinusgitter $[T_0(\xi) = 1 + \cos(\frac{2\pi}{\Lambda}\xi)]$ in vorderer Brennebene ergibt sich in der hinteren Brennebene:

$$u(x') = \delta(0) + \frac{1}{2} [\delta(x' - \frac{\lambda f}{\Lambda}) + \delta(x' + \frac{\lambda f}{\Lambda})]$$

Rechteckgitter $[T_0(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{rect}(\frac{\xi}{2a} + \Lambda n)]$ mit $\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$] ergibt: $u(x') = 2a \text{sinc}(\frac{kax'}{f}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x' - \frac{n\lambda f}{\Lambda})$

Gehen nun die nullte und erste Beugungsordnung durch eine Linse [Abbildungskriterium nach Abbe, Λ kleinste auflösbare Struktur], so gilt bei parallelem Strahlengang:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{n \sin(\alpha)}$$

Fresnel vereinfacht sich mit $\xi' = \frac{R_0}{R_0+R'}[x - x_0] + x_0$, $\eta' = \frac{R_0}{R_0+R'}[y - y_0] + y_0$, $\xi_x = \sqrt{\frac{2}{\lambda B}}[\xi - \xi']$, $\eta_x = \sqrt{\frac{2}{\lambda B}}[\eta - \eta']$ und $\frac{1}{B} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R'}$ zu:

$$u(Q) = c \int_{\mathbb{R}^2} T_0(\xi_x, \xi_y) e^{i \frac{\pi}{2} [\xi_x^2 + \xi_y^2]} d\xi_x d\xi_y$$

Dies lässt sich in Fresnel'sche Integrale $[c_\kappa(\kappa) = \int_0^\kappa \cos(\frac{\pi}{2} \xi_x^2) d\xi_x, s_\kappa(\kappa) = \int_0^\kappa \sin(\frac{\pi}{2} \xi_x^2) d\xi_x]$ aufspalten und numerisch lösen.

Fresnel-Zahl:
 [Fläche des Beugungsobjektes A , Punkt-Bild-Abstand L]

$$N_F = \frac{A}{\lambda L}, \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Fresnelbeugung} & 10^{-2} \leq N_F \leq 10^2 \\ \text{Fraunhoferbeugung} & N_F < 10^{-2} \\ \text{geometrische Optik} & N_F > 10^2 \end{array} \right.$$

Kohärenz: „Fähigkeit zur Interferenz“ [$\hat{=}$ Korrelation, zeitlich oder räumlich]

Kohärenzfunktion 2. Ordnung für den stationären Fall: $\Gamma_{1,2}(\tau) = \langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) \rangle$, τ - Laufzeitdifferenz.

Kohärenzgrad: $\gamma_{1,2} = \frac{\Gamma_{1,2}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{1,1}(0)\Gamma_{2,2}(0)}}$

So schreibt sich das Interferenzgesetz: $I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}(\gamma_{1,2}(\tau))$

Dabei erfüllt $\Gamma_{1,2}$ zwei Wellengleichungen: $\Delta_i \Gamma_{1,2}(\tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma_{1,2}(\tau)$.

Daraus ergibt sich für anfangs inkohärentes, quasimonochromatisches Licht im Fernfeld:

$$\gamma_{1,2} = c_1 \frac{\iint_{\text{Quelle}} I(\xi, \eta) e^{-i \frac{k}{c^2} [\xi x + \eta y]} d\xi d\eta}{\iint_{\text{Quelle}} I(\xi, \eta) d\xi d\eta}$$

[vgl. Van Cittert-Zernike-Theorem]