

# 1 Elektrostatik

## 1.1 Elektrische Ladungen - Coulomb-Gesetz

1. Es gibt zwei verschiedenen Arten von **Ladungen**. Wir nennen sie "**positiv**" und "**negativ**". Sie können durch ihre Kraftwirkung aufeinander und durch ihre Ablenkung in elektrischen und magnetischen Feldern unterschieden werden.
2. Ladungen **gleichen** Vorzeichens **stoßen** sich ab; solche **entgegengesetzten** Vorzeichens **ziehen** sich **an**.
3. Ladungen sind an **massebehaftete** Teilchen gebunden (z.B.: Elektronen (J. Thomson 1879), Ionen, Protonen, Myonen,...).
5. Die Ladung ist **gequantelt** (Milikan 1929):  $Q = n \cdot e$ ,  $n \in \mathbb{Z}, e \approx 1.6022 \cdot 10^{-19} C$ . (1)
6. Ladungstransport ist "**elektrischer Strom**":  $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \dot{Q}$ . (2)
7. Coulomb-Gesetz:  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} |\hat{r}|$ ,  $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{A^2 s^4}{kg m^3}$ . (3)
14. Definition von 1 Coulomb:
  - Ladung, die bei einem Strom von 1 Ampère in 1 Sekunde fließt ( $1C = 1As$ ).
  - Kraft zwischen 2 Punktladungen mit jeweils 1C im Abstand von 1 Meter mit  $8.988 \cdot 10^9 N$ .
  - Als Kombination von Josephson-  $K_J$  [ $\frac{Hz}{V}$ ] und Klitzing-Konstante  $R_K$  [ $\Omega$ ] ( $e = \frac{2}{K_J R_K}$  und dann  $1C = 6.241.509.629.152.650.000e$ ).

## 1.2 Das Elektrische Feld

1. Wirkung von Ladungen  $Q_i$  auf eine Probeladung  $q$ :  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{qQ_i}{|\vec{r}_i|^2} \hat{r}_i$ , (4)  
wobei  $\hat{r}_i$  der Einheitsvektor in Richtung  $r_i$  ist und  $q$  sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet.
2. Liegt  $q$  nicht im Ursprung, sondern um  $\vec{R}$  verschoben, so gilt:  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^i \frac{qQ_i(\vec{r}_i - \vec{R})}{|\vec{r}_i - \vec{R}|^3}$ . (4a)
3. o.B.d.A. liege  $q$  im Ursprung, dann gilt:  $\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^i \frac{Q_i}{|\vec{r}_i|^2} \hat{r}_i$ .  $\oplus \rightarrow \ominus$
4. **elektrisches Feld** (in Analogie zur Mechanik:  $\text{Feld} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Probeladung}}$ ):  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^i \frac{Q_i}{|\vec{r}_i|^2} \hat{r}_i$  [ $\mathcal{E}$ ] =  $\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$ . (5)
7. 3-d:  $Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV \Rightarrow \vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \rho(\vec{r}) d^3r$ ; 2-d:  $Q = \int_A \sigma dA$  ( $\rho = \text{Ladungsdichte}$ ;  $\sigma = \text{Flächenladungsdichte}$ ).

# 2 Elektrisches Feld & Potential - Feld- und Potentiallinien

## 2.0 Motivation

2. Coulomb-Kraft selbe Form wie Gravitationskraft  $\Rightarrow$  **konservativ**  $\Rightarrow$  **Potential** ( $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = -[E_{pot}(\vec{r}_2) - E_{pot}(\vec{r}_1)]$ ).

## 2.1 Konstantes elektrisches Feld $\vec{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_x, 0, 0)$

2.  $E_{pot}(x) = -q \cdot \mathcal{E}_x \cdot \hat{x}$  (+const.)

## 2.2 Zentralsymmetrisches Feld (nur in x-Richtung)

2. Verrichtete **Arbeit**:  $W_{\vec{r}_1, \vec{r}_2}^{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_0}{r^2} dr + 0d\theta = -\frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -[E_{pot}(r_2) - E_{pot}(r_1)]$ .
3.  $\Rightarrow E_{pot}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_0}{|\vec{r}|}$ ; wobei gilt:  $F = -\text{grad}(E_{pot}) = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} - \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}$ .
5. Elektrisches **Potential** =  $\frac{\text{potentielle Energie}}{\text{Probeladung}}$

## 2.3 Allgemeine Definition des elektrischen Potentials

3.  $\vec{\mathcal{E}} = -\text{grad}(U)$ ; [ $U$ ] =  $\frac{J}{C} = V$  (Volt).
4.  $F$  konservativ  $\Rightarrow \oint \vec{F} d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = 0$ . (Maschenregel)

### 3 Gauß'sches Gesetz

#### 3.0 Vorbemerkungen

1. Alle **Feldlinien** beginnen oder enden an Ladungen. Die **Dichte** der Feldlinien im Raum ist i. Allg. verschieden.
3. Gehen von einer Punktladung  $N$  Feldlinien aus, so wird eine um die Punktladung konzentrisch gelegte Kugel mit Radius  $r$  und Oberfläche  $A = 4\pi r^2$  von allen durchstoßen, so dass gilt: Dichte =  $\frac{N}{4\pi r^2}$ .
4.  $\Rightarrow$  Dichte der Feldlinien  $\sim |\vec{E}|$ .

#### 3.1 Definition des Raumwinkels

- $A$  sei eine Oberfläche auf einer Kugel mit Radius  $R$  um den Ursprung; alle Linien vom Ursprung zur Umrandung von  $A$  bilden einen verallgemeinerten Kegel. Der **Raumwinkel**  $\Omega$  des Konus' ist definiert als  $\Omega = \frac{A}{R^2}$ . (1)
- $\Omega$  ist **unabhängig** vom Radius der Kugel.
- Der **maximale** Wert:  $A_{max} = 4\pi R^2 \Rightarrow \Omega_{max} = 4\pi$ ; **infinitesimaler** Wert:  $d\Omega = \frac{dA}{R^2}$ . (2)

#### 3.2 Oberflächenvektor

- $A$  sei ein zusammenhängender Teil einer geschlossenen Oberfläche. Der Vektor  $\vec{A}$  heißt **Oberflächenvektor** von  $A$ , wenn  $|\vec{A}| = \text{Flächeninhalt}$  von  $A$ ,  $\vec{A} \perp$  Oberfläche von  $A$  und  $\vec{A}$  nach **außen** zeigt.
- Ist  $A$  nicht Teil einer geschlossenen Oberfläche, so wird das Flächenstück in einer Richtung umlaufen und  $\vec{A}$  nach der **Rechte-Hand-Regel** bestimmt.

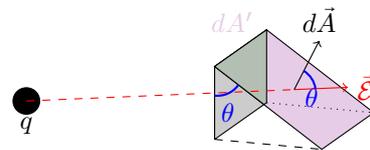
#### 3.3 Der elektrische Fluss

1. In Analogie zum wasserdurchflossenen Rohr: Fluss durch einen Ring  $\equiv$  wie viel Wasser durch die Fläche  $A$  fließt, die der Ring umschließt.  $\vec{A}$  sei der Oberflächenvektor zu dieser  $A$ .  
 $\vec{A} \perp$  Wasserströmung  $\Rightarrow$  Fluss = 0.
2.  $\vec{A} \parallel$  Wasserströmung  $\Rightarrow$  Fluss max., proportional  $|\vec{A}|$ .  
 $\vec{A} \nparallel$  Wasserströmung  $\Rightarrow$  Fluss ist negativ.
 

}	Eine Definition des Flusses mit dem Skalarprodukt aus Fläche und Vektorfeld ist naheliegend.
---	--
3. Definition des elektrischen Fluss'  $\Phi$ :  $d\Phi = \vec{E}(\vec{r})d\vec{A}$ ,  $\Phi_A = \iint_A \vec{E}d\vec{A}$ . (3)

#### 3.4 Gauß'sches Gesetz

1. Die Behauptung ist, dass der Gesamtfluss durch eine geschlossene Oberfläche  $A$  gleich der von dieser eingeschlossenen Ladung geteilt durch  $\epsilon_0$  ist.  $\iint_A d\Phi = \iint_A \vec{E}d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$  (4)
2. Zum Nachweis genügt es, den Fluss  $\Phi$  für eine Ladung  $q$  mit einer beliebigen umspannenden Fläche  $A$  zu berechnen; der Rest ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip.
3.  $\Phi = \iint_A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}d\vec{A}$ .
4.  $\hat{r}d\vec{A} = \cos(\theta(\vec{r}))d\vec{A}$  und  $d\vec{A}' = \cos(\theta(\vec{r}))d\vec{A} \Rightarrow d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dA'$ . (5)
8. Raumwinkel  $d\Omega = \frac{dA'}{r^2} \Rightarrow d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega$ . (7)
9. Addition aller  $d\Phi$ :  $\iint_A d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \iint_A d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$ . (9)



#### 3.5 Anwendung des Gauß'schen Gesetzes

- a) Punktladung  $q$ :
  1. Symmetrie nutzen und geeignete Oberfläche auswählen! Für die Punktladung offensichtlich eine Kugel.
  2. Durch diese Wahl der Oberfläche ist  $\vec{E}$  konstant und  $\theta = 0^\circ \Rightarrow \iint_A \vec{E}d\vec{A} = \mathcal{E}4\pi r^2 \stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ .
- b) gleichmäßig geladene Hohlkugel:
  1. Innen keine Ladung, außen mit  $\frac{1}{r^2}$ .
- c) geladener Draht:
  1. Zylinder als Fläche!
  2. ( $\lambda :=$  Ladungsdichte)  $\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} = \iint_A \vec{E}d\vec{A} = \underbrace{\iint_{\text{Mantel}} \vec{E}d\vec{A}}_{\vec{E} \parallel d\vec{A}} + \underbrace{\iint_{\text{Deckel}} \vec{E}d\vec{A}}_{\vec{E} \perp d\vec{A}} = \mathcal{E}2\pi r l + 0 \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{|\vec{r}|}$ .

d) gleichmäßig geladene Oberfläche:

1. Oberflächenladungsdichte  $\sigma$ ; aus Symmetrie:  $\mathcal{E} \perp$  Platte  $\Rightarrow$  zylindrische Dose mit zur Platte parallelen Deckeln der Fläche  $a$ ; eingeschlossene Ladung  $Q = \sigma a$ :

$$\oint_{\text{Dose}} \mathcal{E} d\vec{A} = \underbrace{\iint_{\text{Deckel, links}} \mathcal{E} d\vec{A}}_{\mathcal{E}a} + \underbrace{\iint_{\text{Zylinder}} \mathcal{E} d\vec{A}}_0 + \underbrace{\iint_{\text{Deckel, rechts}} \mathcal{E} d\vec{A}}_{\mathcal{E}a} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \Leftrightarrow 2\mathcal{E}a = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

### 3.6 Elektrischer Leiter

1. In einem Leiter sind die Ladungsträger (Elektronen) frei beweglich  $\Rightarrow \vec{\mathcal{E}}$  im Innern des Leiters ist  $\vec{0}$ ; sonst flöbe ein Strom.
2. Nach Gauß'schem Gesetz keine (freien) Ladung im Leiter.
3. Auf der Oberfläche eines Leiters kann  $\vec{\mathcal{E}} \neq 0$  sein  $\Rightarrow$  auch Ladung an der Oberfläche ( $\sim$  Austrittsarbeit).
5. Betrachtet man einen infinitesimal großen Zylinder, der teilweise in diesen Leiter hineinragt, Deckelfläche  $a$  hat und mit dieser parallel zur infinitesimal kleinen Oberfläche auf dem Leiter steht, so gilt:

$$\underbrace{\iint_{\text{Deckel, innen}} \mathcal{E} d\vec{A}}_0 + \underbrace{\iint_{\text{Zylinder, innen}} \mathcal{E} d\vec{A}}_0 + \underbrace{\iint_{\text{Zylinder, außen}} \mathcal{E} d\vec{A}}_0 + \underbrace{\iint_{\text{Deckel, außen}} \mathcal{E} d\vec{A}}_{\mathcal{E}a} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

### 3.7 Influenz und eine wichtige Feinheit

1. Das  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld im Oberflächenintegral ist das gesamte Feld! Nicht nur das von den Ladungen im Innern der Fläche erzeugt!

2. Das Feld zwischen zwei parallelen, gegennamig geladenen Platten:  $0 + \underbrace{\iint_{\text{Deckel, zwischen}} \mathcal{E} d\vec{A}}_{\mathcal{E}a} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$ .

## 3.8 Divergenz, Kontinuitätsgleichung & die differentielle Form des Gauß'schen Satz'

### 3.8.1 Divergenz

1. Nabla-Operator:  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ .

2. **Divergenz** ist Skalarprodukt aus  $\vec{\nabla}$  und Vektorfeld  $\vec{A}$ :  
 $\text{div}(\vec{A}) = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$ .

3. elektrische Stromdichte  $\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$  an  $E = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ .

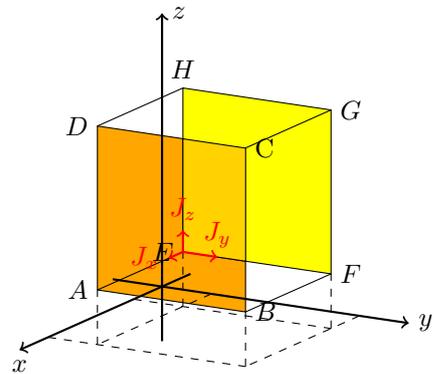
7.  $J_x = J_x^{out} - J_x^{in} = [J_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - J_x(x_0, y_0, z_0)] \Delta y \Delta z$

8. Erweitern mit  $\frac{\Delta x}{\Delta x}$  ergibt  $J_x = \frac{J_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - J_x(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z = \left. \frac{\partial J_x}{\partial x} \right|_{x_0, y_0, z_0} \Delta x \Delta y \Delta z$ .

12. Analog in  $y$ - und  $z$ -Richtung, Addition aller Ströme:

$$J_{netto} = J_x + J_y + J_z = \left[ \left. \frac{\partial J_x}{\partial x} \right|_{x_0, y_0, z_0} + \left. \frac{\partial J_y}{\partial y} \right|_{x_0, y_0, z_0} + \left. \frac{\partial J_z}{\partial z} \right|_{x_0, y_0, z_0} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\boxed{J_{netto} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV}$$



### 3.8.2 Kontinuitätsgleichung

1.  $\frac{\partial q}{\partial t} + J_{netto} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = 0 \Rightarrow \rho = \frac{dq}{dV}$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) = 0}$$

### 3.8.3 Divergenzsatz

$$2. \sum_{i=1}^6 \vec{J} \Delta \vec{\sigma}_i = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dx dy dz$$

3. Die Vorzeichen sind dabei durch die Richtung von  $\vec{\sigma}$  gegeben.

$$5. \text{Übertragen auf einen Körper gibt: } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^6 \vec{J} \Delta \vec{\sigma}_i = \sum_{j=1}^n \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Delta V_j.$$

8. Alle Flüsse im Innern des Volumens heben sich gerade auf, es bleibt also nur die Oberfläche:

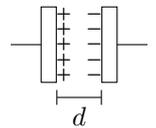
$$\oint_S \vec{J} d\vec{\sigma} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV$$

### 3.8.4 Das Gauß'sche Gesetz in differentieller Form

$$1. \text{ integrale Form: } \oint_A \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad \Leftrightarrow \quad \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

## 4 Kondensatoren



### 4.1 Definition der Kapazität

1. Ladung  $+Q$  auf die linke Platte aufgebracht  $\Rightarrow$  rechts  $-Q$  durch Influenz.

$$2. \exists \vec{\mathcal{E}}\text{-Feld mit } \mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow -[U(d) - U(0)] = \int_0^d \mathcal{E} dx = \frac{Q}{A\epsilon_0} d \Rightarrow U = -\frac{Q}{A\epsilon_0} d.$$

$$4. U \sim Q, \text{ wobei Proportionalitätsfaktor } \boxed{C = \frac{Q}{U}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad [C] = \frac{C}{V} = F \text{ (Farad).}$$

### 4.2 Zylinderkondensator

$$2. \text{ In Zylinderkoordinaten } \vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} \vec{e}_r \text{ mit } \vec{\mathcal{E}}_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \Leftrightarrow \quad -[U(b) - U(a)] = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi l}{\ln \frac{b}{a}} \epsilon_0.$$

### 4.3 Serienschaltung von Kondensatoren

1. Erst  $U = 0V$ , also keine Ladung auf den **in Reihe** geschalteten Kondensatoren  $C_1, C_2, C_3$ .

2. Anlegen einer Spannung  $\Rightarrow$  auf allen Platten stellt sich durch Influenz eine Ladung ein

$$(|Q(C_1)| = |Q(C_2)| = |Q(C_3)|).$$

$$4. \text{ Es gilt } U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = Q \cdot \overbrace{\left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)}^{\frac{1}{C}}.$$

### 4.4 Parallelschaltung von Kondensatoren

1. Es ist klar  $U_1 = U_2 = \dots = U_n = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \dots = \frac{Q_n}{C_n}$ .

2. Betrachte die **parallel** geschalteten Kondensatoren als 1 Element:  $\boxed{C_{ges.} = \frac{Q_{ges.}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_n}$ .

### 4.5 Im Kondensator gespeicherte Energie

1. In einem Plattenkondensator ist das  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld konstant  $\Rightarrow$  bringt man die infinitesimale Ladung  $dQ$  von der einen auf die andere Platte, so wird die Arbeit  $dW = \vec{\mathcal{E}} dQ d$  ( $d$  = Plattenabstand) verrichtet.

2. Allerdings wird dabei die Ladung  $Q$  auf der einen Platte auf  $Q + dQ$  erhöht.  $\Rightarrow E = \int_{Q=0}^{Q_{tot}} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2C} Q_{tot}^2$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} C U^2}$$

## 5 Dielektrika im elektrischen Feld

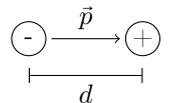
### 5.0 Vorbemerkungen

1. Bringt man zwischen die Platten eines Kondensators einen Isolator ("Dielektrikum"), so sinkt die Spannung um einen Faktor  $\epsilon$ .
2. Da sich die Ladung  $Q$  auf den Platten nicht geändert hat, muss sich die Kapazität  $C$  geändert haben:  

$$C = \epsilon C_0 = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$
3. Die dimensionslose Zahl  $\epsilon$  heißt "relative Dielektrizitätskonstante" oder "Dielektrizitätszahl".  $\epsilon$  ist eine Materialkonstante (insbesondere in sehr guter Näherung unabhängig von  $\vec{E}$ ).

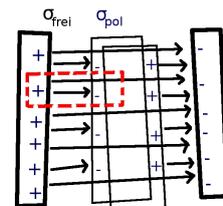
### 5.1 Der elektrische Dipol

1. Definition: **Dipolmoment**  $\vec{p} = q\vec{d}$  in Richtung von negativer zu positiver Ladung.
2. Drehmoment im homogenen elektrischen Feld:  $\vec{D} = 2\frac{d}{2} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$ .
3. Potentielle Energie:  $W_{pot.} = q(U_2 - U_1) = -q\vec{d}\vec{E} = -\vec{p}\vec{E}$ .  
 $W_{pot.}$  wird minimal, wenn  $\vec{p} \uparrow \vec{E}$ , und maximal, wenn  $\vec{p} \downarrow \vec{E}$ .
4. Im inhomogenen  $\vec{E}$ -Feld ist  $\text{grad}(\mathcal{E}_x), \text{grad}(\mathcal{E}_y), \text{grad}(\mathcal{E}_z) \neq 0 \Rightarrow F = -\text{grad}(W_{pot}) \neq 0$ .  
 Im **inhomogenen**  $\vec{E}$ -Feld gibt es eine Kraft auf den Dipol, während es im **homogenen**  $\vec{E}$ -Feld nur ein Drehmoment gibt.



### 5.2 Dielektrische Polarisation

1. Beim Anlegen eines elektrischen Feldes werden die Teilchen des Dielektrikums **polarisiert**  $\Rightarrow$  es baut sich ein Gegenfeld im Dielektrikum auf  $\Rightarrow$  Feldstärke im Dielektrikum wird kleiner  $\Rightarrow$  vgl. Beobachtung mit Dielektrikum im Kondensator.
2. Wir nehmen an, in jedem Atom seien Ladungen  $q$  vorhanden, die den Abstand  $d$  haben. Es sei  $N$  die Volumendichte der Ladungen.  
**Polarisation:**  $\vec{P}$  = Dipolmoment pro Volumeneinheit  $\vec{P} = Nq\vec{d} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$ .
3. Im Innern des Dielektrikums ist die Ladungsdichte im Mittel 0 (solange die Polarisation homogen ist). An der Oberfläche hingegen gibt es eine **Flächenladungsdichte**  $\sigma_{pol}$ , da die positiven gegen die negativen Ladungen verschoben sind.
4. Volumen der Schicht, in der die Ladung "sichtbar" ist:  $Ad$ . Ladung  $Q_{pol}$  in dieser Schicht:  $Q_{pol} = NqAd$ . Flächenladungsdichte  $\sigma_{pol} = \frac{Q_{pol}}{A} = Nqd$ .  $\Rightarrow |\vec{P}| = \sigma_{pol}$ .
5. Mit dem Gauß'schen Gesetz können wir die Feldstärke im Dielektrikum bestimmen, wobei  $q_{frei} = \sigma_{frei}A$  und  $q_{pol} = \sigma_{pol}A$   $\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma_{frei} - \sigma_{pol}}{\epsilon_0}$  (4)
6. (3)  $\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma_{frei} - P}{\epsilon_0}$ . (5)
7. Die Polarisation  $P$  wurde durch das  $\mathcal{E}$ -Feld hervorgerufen:  $P = P(\mathcal{E})$ . In erster Näherung:  $P = \chi \epsilon_0 \mathcal{E}$  (6)  
 $\chi$  - elektrische Suszeptibilität
8. (6) in (5)  $\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma_{frei} - \chi \epsilon_0 \mathcal{E}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma_{frei}}{\epsilon_0(1 + \chi)}$  (7)
9. Für den Plattenkondensator gilt  $U = \mathcal{E}d$ . Für einen vollständig mit Dielektrikum gefüllten:  $U = \frac{\sigma_{frei}}{\epsilon_0(1 + \chi)}d$ .
10. Die Gesamtladung auf dem Kondensator ist  $Q = \sigma_{frei}A \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0(1 + \chi)A}{d} = \epsilon_0(1 + \chi) \frac{A}{d}$ . (8)
11. Vergleich mit  $C = \epsilon_0 \epsilon \frac{A}{d} \Rightarrow \epsilon = 1 + \chi$ . (9)



### 5.3 Gauß'sches Gesetz mit Dielektrika

1. Nach Gauß:  $\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{q_{frei}}{\epsilon_0} + \frac{q_{pol}}{\epsilon_0}$ .
2.  $q_{pol} = \int_V \rho_{pol} dV = -\oint_A \vec{P} d\vec{A}$  ( $|\vec{P}| = \sigma_{pol}$ )
3. (11) und (10)  $\Rightarrow \oint_A (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{A} = q_{frei}$ .
4. Mit  $P = \chi \epsilon_0 \mathcal{E} \Rightarrow \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \vec{D}$  die dielektrische Verschiebungsdichte.

### 5.4 Feldenergie im Dielektrikum

1. Energie im Kondensator:  $W_{el.} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 A d \mathcal{E}^2$
2. **Energiedichte:**  $w_{el.} = \frac{W_{el.}}{V} = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}D.$

## 6 Elektrischer Strom - Das Ohmsche Gesetz

### 6.0 Vorbemerkungen

1. Bisher elektrische Ladungen statisch  $\leftrightarrow$  statische elektrische Felder & **Potential!**
2. Bewegte Ladung  $\rightarrow$  Änderung der Ladung  $\rightarrow$  **Strom!**
3. Ströme fließen "normalerweise" in Metallen. Die Leitungselektronen kann man sich als frei bewegliches Elektrogenas vorstellen. Bei Anlegen einer Spannung bewegt es sich im Gitter der positiven Ionenrümpfe.  
In Flüssigkeiten bewegen sich Ionen.
4. Technische Stromrichtung in Bewegungsrichtung positiver Ladungen (entgegengesetzt dem Fluss der Elektronen).

### 6.1 Das Ohmsche Gesetz

1. Ladungen bewegen sich nur, wenn  $\mathcal{E} \neq 0 \Rightarrow$  es existiert ein Potential.
4. Verbindet man die Pole einer Spannungsquelle, so fließt ein **Strom**. Charakteristisch für diesen Stromkreis sind 2 Größen: Spannung  $U$ , Strom  $I$ .
5. Das Verhältnis von Spannung  $U$  zu Strom  $I$  heißt Widerstand  $R: R = \frac{U}{I}$   $[R] = \frac{V}{A} = \Omega$  ("Ohm").
7. Für einen Draht erwartet man:  $R = \rho \frac{l}{A}$  ( $\rho$  - spezifischer Widerstand,  $l$  - Länge,  $A$  - Querschnittsfläche)
8. Spannungsabfall:  $\Delta U = U(x_2 - x_1), R(x_2 - x_1) = \rho \frac{x_2 - x_1}{A} \Rightarrow U = RI = \rho \frac{x_2 - x_1}{A} I.$
9. Elektrisches Feld im Draht:  $\mathcal{E} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\rho \frac{I}{A} = const..$

### 6.2 Stromdichte und Kontinuitätsgleichung

1. **Stromdichte**  $j = \frac{I}{A} \Rightarrow I = \iint_S \vec{j} d\vec{S}.$
2. Strom durch eine geschlossenen Oberfläche (= Änderung der Ladung im eingeschlossenen Volumen):  
$$I = \oint_A \vec{j} d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_{el} dV.$$
3. In differentieller Form:  $\oint \vec{j} d\vec{A} = \iiint \text{div}(\vec{j}) dV \Rightarrow \text{div}(\vec{j}(\vec{r}, t)) = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}(\vec{r}, t).$  **(Kontinuitätsgleichung)**
4. Für  $\frac{d}{dt} \rho = 0 \Rightarrow \oint_A \vec{j} d\vec{A} = 0.$

### 6.3 Das Ohmsche Gesetz in mikroskopischer Form

- Leitfähigkeit  $\sigma = \frac{1}{\rho}; j = \frac{I}{A} = \frac{U}{RA} = \frac{\mathcal{E}l}{RA} = \frac{1}{\rho} \mathcal{E} = \sigma \mathcal{E} \Rightarrow$   $\vec{j} = \sigma \vec{\mathcal{E}}$   $\Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}} = \rho \vec{j}.$

### 6.4 Strom und Potential

1. Existenz eines Potentials  $\Leftrightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}$  wegunabhängig.
2. Betrachtet man eine auf der  $y$ -Achse bewegte punktförmige Ladung  $Q$  und eine auf der  $x$ -Achse von  $(x_1, 0)$  zu  $(x_2, 0)$  bewegte Probeladung  $q$ , so ist klar, dass die wirkenden Kräfte von der Position der Ladung  $Q$  abhängen  $\Rightarrow$  zeit- und wegabhängige Kräfte  $\Rightarrow$  kein Potential!
3.  $\Rightarrow$  i.Allg. kein Potential bei Stromfluss.  
Ausnahme: stationäre Ströme = zeitlich konstante Ladungsverteilung.

## 7 Joulesches Gesetz und Kirchhoff'sche Regeln

### 7.0 Spannungsabfall

1. In einem homogenen elektrischen Leiter konstanten Querschnitts:  $\vec{E} = \rho \vec{j} = \rho \frac{I}{A} \vec{e}_x$
2. elektrisches Potential:  $U(l) - U(0) = -\int_0^l \vec{E} d\vec{r} = -\int_0^l \rho \frac{I}{A} dx = -\rho \frac{I}{A} l = -IR$ .
3. technischer Stromfluss vom höheren zum niedrigeren Potential  $\Rightarrow$  Spannungsabfall im Widerstand in Richtung des Stromfluss'.

### 7.1 Joulesches Gesetz

1. idealisiert Drähte ( $R = 0\Omega$ ); Energie:  $dE = Udq = UI dt \Rightarrow$  Leistung  $P = \frac{dE}{dt} = UI$   $[P] = VA = \frac{J}{s} = W$ .

### 7.2 Driftgeschwindigkeit

1.  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, Q = nVq$  ( $n =$  Ladungsträgerdichte)  $\Rightarrow I = \frac{nAlq}{\frac{l}{v}} \Leftrightarrow v = \frac{I}{nAq} = \frac{U}{nAqR} = \frac{U}{nql\rho}$ .
3. typische Größen:  $v = \frac{1V}{10^{23}cm^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}C \cdot 1m \cdot 10^{-8}\Omega} \approx 6 \frac{mm}{s}$ ;  
 Vergleich mit freien Elektronen:  $\frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}C \cdot 1V}{9,11 \cdot 10^{-31}kg}} \approx 600 \frac{km}{s}$ .
4.  $v = const.$   $\Rightarrow$  Gesamtkraft auf ein Teilchen  $F_G = 0 \Rightarrow$  Arbeit der Batterie muss in nichtelektrische Kräfte umgewandelt werden (Gitter, Wärme).

### 7.3 Reale Stromquelle

1. **Elektromotive Kraft (EMK)** = stromlos gemessene Klemmspannung.
2.  $EMK = U_r + U_R = Ir + IR \Leftrightarrow I = \frac{EMK}{r+R}$  und  $U_R = IR \Rightarrow U_R = EMK \frac{R}{r+R}$  ( $r$  Innenwiderstand der Spannungsquelle,  $R$  Widerstand in Reihe.)

### 7.4 Kirchhoff'sche Gesetze

1. Kontinuitätsgesetz:  $0 = \frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{V(A)} \rho_{el} dV = \int_{V(A)} \text{div}(\vec{j}) dV = \int_A \vec{j} d\vec{A} = \sum_k I_k \Rightarrow \boxed{\sum_k I_k = 0}$
2. stationärer Stromkreis:  $\oint \vec{E} d\vec{r} = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_k U_k = 0}$ .

### 7.5 Parallel- und Reihenschaltung

1. Widerstandreihenschaltung:  $U = U_1 + U_2 + U_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 = IR \Rightarrow R = R_1 + R_2 + R_3$
2. Widerstandparallelschaltung:  $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ .

## 8 Magnetfeld

### 8.1 Beobachtungen

1. Ein Magnetfeld kann durch Spulen erzeugt werden.
2. Im Fadenstrahlrohr wird ein Elektronenstrahl erzeugt und sichtbar gemacht.
3. Elektronenstrahl parallel zum Magnetfeld  $\Rightarrow$  Elektronenstrahl unbeeinflusst.
4.  $e^-$ -Strahl  $\parallel$  x-Achse  $\Rightarrow$  Spiral- oder Kreisbahn.

### 8.2 Die Lorentzkraft

1. Die obigen Beobachtungen können mit folgender Formel beschrieben werden:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ .
4. Einheiten:  $1N = C \frac{m}{s} [B] \Leftrightarrow [B] = \frac{N}{C} \frac{s}{m} = 10^4 \text{Gau\ss} = 1T$  (Tesla).

### 8.3 Bewegung im Magnetfeld

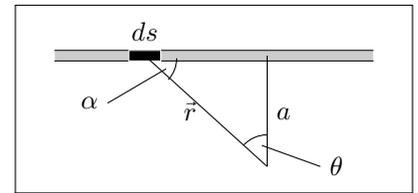
- $\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{v}, |\vec{F}| = const. \Rightarrow$  Kreisbahn.
- Bahn:  $F_{radial} = -qvB = F_{zentripetal} = m\omega^2 r \Leftrightarrow r = \frac{mv}{qB}$ , (wobei  $\omega = \frac{v}{r}$ ).
- Bemerkung: Zwar ist  $r$  eine Funktion von  $v$ , die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist jedoch unabhängig von  $v$ :  $\omega = \frac{qB}{m}$ .
- Gekreuzte  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder; Beispiel:  
 $\vec{E} \perp \vec{B}$  &  $\vec{F}_{Lorentz} = -\vec{F}_{Coulomb} \Leftrightarrow qvB - qE = 0 \Leftrightarrow v = \frac{E}{B}$  ( $\Rightarrow$  Geschwindigkeitsfilter).

### 8.4 Kraft auf Ströme

- Kraft auf ein Elektron im Draht:  $\vec{F} = -|e^-| \vec{v}_{drift} \times \vec{B}$ .
- Kraft  $d\vec{F}$  auf alle  $e^-$  im Drahtstück  $ds$ ,  $n$  Ladungsträgerdichte und  $N$  Ladungen in  $ds$ :  $dN = nAds$   
 $\Rightarrow d\vec{F} = -nAds|e^-| \vec{v} \times \vec{B}$ .
- Driftgeschwindigkeit:  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{|e^-|nAds}{dt} = |e^-|nAv \Leftrightarrow |\vec{v}| = \frac{I}{nA|e^-|}$ .
- Mit  $d\vec{s}$  in technischer Stromrichtung:  $ds\vec{v} = -|\vec{v}|d\vec{s}$ ; also:  $d\vec{F} = nA|e^-||\vec{v}|d\vec{s} \times \vec{B} = Id\vec{s} \times \vec{B}$ .

### 8.5 Das Gesetz von Biot-Savart

- Für einen Punkt im Abstand  $a$  von einem Draht:  $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ .
- Allgemein: 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I (d\vec{s} \times \vec{r})}{4\pi r^3} \sim \frac{1}{r^2}$$



### 8.6 Das Feld eines Stromführenden Drahtes

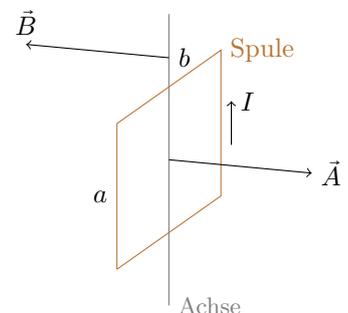
- Nach Biot-Savart:  $\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I (d\vec{s} \times \vec{r})}{4\pi r^3}$ ; dabei gilt:  $d\vec{s} \times \vec{r} = r \sin(\alpha) dx$ ,  $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \cos(\theta)$  und da  $x = a \tan(\theta) \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2(\theta)}$ .
- $\Rightarrow B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I (r \sin(\alpha) dx)}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha) d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ . ✓

### 8.7 Anwendungsbeispiel: Definition der Stromstärke

- Definition: Zwei  $\infty$  lange parallele Leiter (im Vakuum, Im Abstand, Querschnitt sehr klein) werden von  $1A$  durchflossen  $\Rightarrow$  Kraft =  $2 \cdot 10^{-7} N$  auf  $1m$  Länge.
- Der Strom  $I$  im Leiter 1 erzeugt ein Magnetfeld  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .
- Leiter 2 im Abstand  $R$  von Leiter 1 erfährt die Kraft:  $B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ . (20)
- Aufgrund des Stroms in Leiter 2:  $\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F_L = I \cdot l \cdot B$ . (21)
- (20) & (21)  $\Rightarrow F_L = I \cdot l \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \mu_0 \frac{Q^2 v^2}{2\pi R l} \stackrel{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}{=} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{Q^2}{2\pi \epsilon_0 R l}$ . (22)
- $\frac{F_L}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} VsA^2}{2\pi Am \cdot m} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$ .

### 8.8 Das Ampèresche Gesetz

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$



## 9 Materie im Magnetfeld

### 9.1 Magnetische Dipole

- Eine Stromdurchflossene Schleife erzeugt ein dipolartiges  $B$ -Feld.
- Als magnetisches Dipolmoment wird das Produkt  $\vec{p}_m = I\vec{A}$  bezeichnet; (vgl. elektrisches:  $\vec{p}_e = q\vec{d}$ ). Die Stromrichtung bestimmt die Richtung von  $\vec{A}$ .

- Der magnetische Dipol wird in ein homogenes Magnetfeld gesetzt. Wegen  $d\vec{F} = I(d\vec{s} \times \vec{B})$  gibt es eine Kraft auf die Drahtschleife.
- Die Kraft auf die Drahtstücke  $b$  wird vom Lager aufgenommen und erzeugt somit kein Drehmoment.
- Kraft auf ein Drahtstück  $a$ :  $\vec{F}_a = aI(\vec{e}_a \times \vec{B})$ .
- Drehmoment der Schleife:  $\vec{D} = 2\frac{b}{2} [\vec{e}_b \times aI(\vec{e}_a \times \vec{B})] = abI(\vec{e}_b \times \vec{e}_a) \times \vec{B} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ .

### 9.3 Atomare magnetische Momente

- Ein Teilchen (Masse  $m$ , Ladung  $q$ ) auf einer kreisförmigen Bahn (Radius  $R$ ) habe Geschwindigkeit  $v$  und Umlauffrequenz  $f$ :  $I = qf = q\frac{v}{2\pi R} \Rightarrow \vec{p}_m = qfA = \frac{1}{2}qR^2\omega$ .
- Der Drehimpuls der umlaufenden Masse ist:  $\vec{L} = m(\vec{R} \times \vec{v}) = mR^2\omega \Rightarrow \vec{p}_m = \frac{q}{2m}\vec{L}$ .
- Quantenmechanik:  $L = l\hbar$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , für Elektronen  $q = -e$ :  

$$\vec{p}_m = -l\frac{e\hbar}{2m_e} = -l\mu_B; \quad (\mu_B = \text{Bohrsches Magneton}).$$

### 9.4 Magnetisierung und magnetische Suszeptibilität

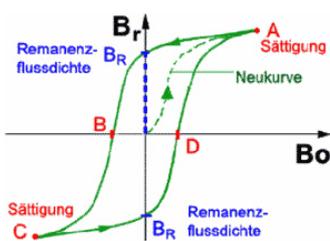
- Wir hatten festgestellt:  $\oint_C \vec{B}d\vec{s} = \mu_0 I$ ;  $\vec{B}$  heißt Magnetfeld.  
 $\Phi_m = \int \vec{B}d\vec{A}$  ist der **magnetische Kraftfluss**  $\Rightarrow \vec{B}$  heißt deshalb auch magnetische Kraftflussdichte.
- Wir hätten auch ein Vektorfeld  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  definieren können  $\Rightarrow \oint \vec{H}d\vec{s} = I$ .  
 $\vec{H}$  hat man früher Magnetfeld genannt; heute heißt  $\vec{H}$  **magnetische Erregung**.
- Füllt man den Innenraum einer Spule mit Materie, dann verändert sich die Kraft um den Faktor  $\mu$   
 $\Rightarrow$  der magnetische Kraftfluss  $\phi_m = \int \vec{B}d\vec{A}$  verändert sich  
 $\Rightarrow \vec{B}_{\text{Materie}} = \mu\vec{B}_{\text{Vakuum}} = \mu\mu_0\vec{H}$ .  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$
- Mikroskopische Erklärung: Materie besteht aus permanenten oder induzierten **Dipolen**, die sich im externen Magnetfeld ausrichten.
- Makroskopische Beschreibung durch **Magnetisierung**:  $\vec{M} =$  Summe der magnetischen Momente pro Volumeneinheit  $\Rightarrow$  Dichte der atomaren magnetischen Momente  $\vec{p}_m$ :  $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_V \vec{p}_m$ .
- Einheiten: da  $\vec{p}_m = I\vec{A} \Rightarrow [\vec{M}] = \frac{Am^2}{m^3} = \frac{A}{m}$ .  
Das ist die selbe Einheit wie die von  $\vec{H} \Rightarrow \vec{B}_{\text{Materie}} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ .
- “Oft” gilt bei nicht zu großen Feldstärken (experimentell):  $\vec{M} = \chi\vec{H}$ .
- $\Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi\vec{H}) = \underbrace{\mu_0(1 + \chi)}_{\mu} \vec{H}$ .

Stoffe	$\chi_{mol}$ in $mol^{-1}$
<b>diamagnetische</b>	$\chi < 0$
$N_2$	$-12 \cdot 10^{-9}$
$Cu$	$-5.46 \cdot 10^{-9}$
$H_2O$	$-13 \cdot 10^{-9}$
$Bi$	$-280 \cdot 10^{-9}$
<b>paramagnetische</b>	$\chi > 0$
$Al$	$16.5 \cdot 10^{-9}$
$O_2$	$3450 \cdot 10^{-9}$
<b>ferromagnetische</b>	$\chi \gg 0$
Eisenlegierungen	50 - 10000

### 9.5 Kräfte im inhomogenen Magnetfeld

- Prinzip der virtuellen Arbeit:  $dE_{pot} = Dd\theta = p_m B \sin(\theta)d\theta \Rightarrow$   
 $E_{pot} = -p_m B \cos(\theta) + c$ .
- $\vec{F} = -\text{grad}(E_{pot}) = \text{grad}(\vec{p}_m \vec{B}) \stackrel{p_m \text{ homogen}}{=} p_m \text{grad}(B)$ .  
Makroskopisch ist  $p_m$  durch  $V\vec{M}$  gegeben  $\Rightarrow \vec{F} = V\vec{M}\text{grad}(B)$   
 $\vec{F} = \frac{\chi}{\mu_0} V \vec{B} \text{grad}(B)$ .

### 9.6 Ferromagnetismus



- Hystereseschleife: Die Magnetisierung  $\vec{M}$  eines ferromagnetischen Stoffes ist keine eindeutige Funktion des anliegenden Feldes.
- Bei  $\vec{B} = 0$  bleibt eine Magnetisierung  $\Rightarrow$  **Remanenz**. Bei  $\vec{B}$  sehr groß geht die Magnetisierung in Sättigung.

### 9.7 Der Hall-Effekt

- Positive Ladungsträger in einem stromführenden Leiter der Ladungsträgerdichte  $n$ , Dicke  $d$  und Breite  $b$  haben Driftgeschwindigkeit  $v_D$ :  $I = n q v_D b d \quad \vec{j} = n q \vec{v}_D$ . (25)

- Ein senkrecht zum Strom angelegtes Magnetfeld  $\vec{B}$  lenkt die positiven Ladungsträger ( $F_L$ ) aus  $\Rightarrow$  Ladungstrennung  $\Rightarrow$  **Hallspannung** (Boden- und Deckfläche des Quaders wie Kondensator).

- Ladungstrennung geht so lange, bis  $|F_{Coulomb}| = |F_{Lorentz}|$ :  $|F_C| = q\mathcal{E}_H = q \frac{U_H}{b} = |F_L| = q v_D B$   
 $\Rightarrow U_H = v_D b B = \frac{I B}{n q d}$ . (26)

- Der Hall-Effekt ist die Grundlage (empfindlicher) Magnetfeldsonden.

**Sondenempfindlichkeit**  $S = \frac{U_H}{B} = \frac{I}{n q d}$ . (28)

- Halbleiter-Ladungsdichte  $10^6$ -mal kleineres  $n$  als Metalle  $\Rightarrow$  Halbleiter für Hallsonden.

- $b = 1mm, I = 100mA, n = 10^{15}cm^{-3} \Rightarrow S = 0,6 \frac{V}{T}$ .

### 9.8 Elektromagnete

- Magnetfeld im Luftspalt: Die **Normalkomponente von  $\vec{B}$  ist stetig**  $\Leftrightarrow \vec{B}_i = \vec{B}_a, H_a = \frac{1}{\mu_0} B_a, H_i = \frac{1}{\mu\mu_0} B_i$ .

Ampère:  $\oint \vec{H} d\vec{s} = NI = H_i l + H_a d = \frac{B}{\mu\mu_0} l + \frac{B}{\mu_0} d \Rightarrow B = \frac{N I \mu_0}{\frac{l}{\mu} + d}$ .

- Bemerkung: für ferromagnetische Stoffe  $\mu > 1000 \Rightarrow$  Im Nenner dominiert  $d$ , obwohl  $d \ll l$  vorausgesetzt war  $\Rightarrow B$  fällt für wachsendes  $d$  ab.

- Ein Weicheisenteil wird in den Luftspalt gezogen, weil die Gesamtenergie dadurch kleiner wird.

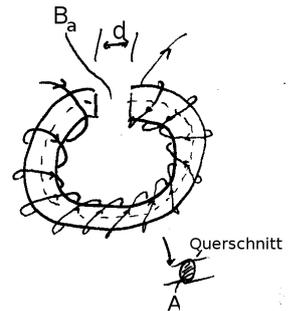
**Energiedichte:**  $w = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}$ .

Energie mit Luftspalt:  $E_{Spalt} = \frac{A}{2} l H_i B + \frac{A}{2} d H_a B = \frac{A}{2} B^2 \frac{1}{\mu_0} (\frac{l}{\mu} + d)$ .

Energie mit gefüllten Spalt:  $E_{voll} = \frac{A}{2} B^2 \frac{1}{\mu_0} (\frac{l}{\mu} + \frac{d}{\mu})$ .

- $\Rightarrow \Delta E = E_{Spalt} - E_{voll} = \frac{1}{2} A \frac{B^2}{\mu_0} d (1 - \frac{1}{\mu})$ .

- Haltekraft: um den Luftspalt zu vergrößern:  $|\vec{F}| = \frac{\partial E}{\partial x} \approx \frac{1}{2} A \frac{B^2}{\mu_0}$ .



## 11 Induktion

### 11.2 Ein Problem

- Bisher:  $F_{Coulomb}$  konservativ  $\Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}U \Leftrightarrow \text{rot}(\vec{\mathcal{E}}) = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = U - IR = 0$ . (2)

- Energiebilanz (Batterie beschleunigt, Gitter bremst): Chemische Energie +  $(-q)U + qIR$  - Gitterarbeit = 0. (4)

- $\Leftrightarrow \underbrace{(Chemische\ Energie - qU)}_{=0} + \underbrace{(qIR - Gitterarbeit)}_{=0} = 0$ , da die kinetische Energie der Elektronen konstant ist und die Terme paare sich auf getrennte Bereiche beziehen.

- In einem induktiv gekoppelten Stromkreis gibt es keine Batterie:  $qIR - Gitterarbeit = 0$

$\Leftrightarrow$  Gitterarbeit =  $q \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = qIR \Leftrightarrow \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = IR \neq 0$ , also kein Potential!

- Dabei sind hier auch weder stationäre Ladungen noch stationäre Ströme vorhanden.

### 11.3 Faradays Erklärung

- Postulat: beobachtete *EMK* resultiert aus der Änderung des magnetischen Fluß':

$$EMK = \frac{d}{dt} \Phi_{mag} \quad , \quad \Phi_{mag} = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \Phi_{mag}$$

- Bemerkung: Vorzeichen nach Lenz'scher Regel, Selbstinduktion vernachlässigt.

### 11.4 Lenz'sche Regel

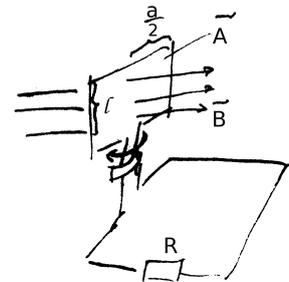
1. Der in eine Leiterschleife induzierte Strom muss dem erzeugenden entgegen gerichtet sein, da er sonst durch Selbstinduktion sich selbst verstärkte  $\Rightarrow$  Lawineneffekt!
5. Die durch die Induktion entstehenden Ströme, Felder oder Kräfte behindern stets den die Induktion auslösenden Vorgang.

### 11.6 Selbstinduktion

1. Bei konstanter Geometrie: es gilt  $\Phi_{mag} = \int_A \vec{B} d\vec{A} \Rightarrow \Phi_{mag} \sim \vec{B}$  und  $\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow I \sim B$ .
3.  $\Rightarrow \Phi_{mag} = L \cdot I$  mit  $L$  der **Induktivität** oder Selbstinduktion.
4.  $[L] = \frac{[\Phi_{mag}]}{[I]} = \frac{Tm^2}{A} = \frac{kg m^2}{A^2 s^2} = H$  (1 Henry).
5. Induktivität einer Spule:  
nach Ampère gilt für das Magnetfeld:  $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$  und daher  $\Phi_{mag} = N \pi r^2 B = N \pi r^2 \frac{\mu_0 N}{l} \cdot I = L \cdot I$   
 $\Rightarrow L = \mu_0 N^2 \pi \frac{r^2}{l}$  ist die Induktivität einer Spule!

### 11.7 Der Generator

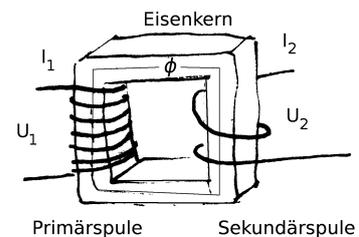
1. Magnetische Fluss:  $\Phi_m(t) = BA \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \Phi_m = -\omega BA \sin(\omega t)$
2.  $\oint \vec{E} d\vec{r} = \int_{Widerstand} \vec{E} d\vec{r} = IR \stackrel{!}{=} -\frac{d}{dt} \Phi_m = \omega BA \sin(\omega t) \Rightarrow I(t) = \frac{BA\omega}{R} \sin(\omega t)$ .
3. elektrische Leistung:  $P = I^2 R = \frac{1}{R} B^2 A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$ .
4. mechanische Leistung:  $P = 2\vec{v}\vec{F}$   
 $= 2 \frac{\omega}{2} I l B \sin(\omega t) = AB\omega \sin(\omega t) I$   
 $= \frac{1}{R} A^2 B^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$ .  
 $v = \frac{\omega}{2} l, \vec{F} = l\vec{I} \times \vec{B} = lIB$ .



### 11.8 Der Transformator

1. Primärspule:  $U_1 + U_{Ind} = 0, U_{Ind} = -L \frac{dI_1}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_m}{dt}$ .
2. Sekundärspule: Der Fluss  $\Phi_m$  durch beide Spulen ist gleich  
 $\Rightarrow \dot{\Phi}_m$  auch gleich  $\Rightarrow$  induzierte Spannung  $U_2 = -N_2 \frac{d\Phi_m}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$



### 11.9 Selbstinduktion II

1. Idealisierung: Ein Stromkreis mit nur einer Schleife, einem Widerstand und idealen Leitern; Induktion nur in der Schleife (real: viele Windungen, Ferritkern, "Ersatzschaltbild").
2.  $\int_{Spule} \vec{E} d\vec{r} = -\dot{\Phi}_m = -\frac{d}{dt} \int_{Spule} \vec{B} d\vec{A}$  ist die an den Anschlusspolen der Spule herrschende Spannung.
3.  $\Rightarrow$  Die Kirchhoff'sche Maschenregel kann damit korrigiert werden:  $\oint \vec{E} d\vec{r} + L\dot{I} = 0$ .

## 12 Stromkreise mit Widerständen, Kondensatoren und Spulen

### 12.0 Vorbemerkung

1. Idealisierende Annahmen: Widerstand mit  $C = 0, L = 0$ ; Kondensator mit  $L = 0, R = 0$ ; Spule mit  $C = 0, R = 0$ .
2. In der Spule (und somit im Schaltkreis) existiert kein Potential!
3. Vorzeichenkonvention:  $\Phi_m = +LI, U_L = \oint \vec{E} d\vec{r} = -L \frac{dI}{dt}$ .

### 12.2 Der RL-Kreis

1. Aus der korrigierten Maschenregel erhält man:  $U_0 - IR = -U_L = L \frac{dI}{dt}$  (aufgrund der induzierten Gegenspannung in der Spule).
2. Lösung: homogen:  $\frac{dI_h}{dt} + \frac{R}{L} I_h = 0 \Rightarrow \ln(I_h) = -\frac{R}{L}t + \ln(c) \Rightarrow I_h = ce^{-\frac{R}{L}t}$   
 partikulär:  $\frac{dI}{dt} \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} 0 \Rightarrow I_p = \frac{U_0}{R}$  und  $I(0) = 0$ :  

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$
3.  $U_0 - RI = L \frac{dI}{dt}$  für  $t = 0$ :  $L \frac{U_0}{L} = -U_L = U_0$ .

### 12.3 Der RC-Kreis

1. Nach Maschenregel:  $U_0 - IR - \frac{Q}{C} = 0$ .
2. Das negative dessen zeitlicher Ableitung ergibt:  $\dot{I} + \frac{1}{RC} I = 0 \Rightarrow \ln(I) = -\frac{1}{RC}t + \ln(c)$   

$$\Rightarrow I(t) = I(0) e^{-\frac{1}{RC}t}.$$
3. Es folgt:  $-U_C(t \rightarrow \infty) = \frac{Q}{C} = \frac{\int_0^\infty I(t) dt}{C} = I_0 R = U_0$ .
4.  $dW_C = -U_C dQ = d\left(\frac{C}{2} U^2\right) = d\left(\frac{1}{2C} Q^2\right) \sim \frac{1}{2} m x^2 (E_{\text{pot}})$   
 $dW_L = -U_L dQ = L \frac{dI}{dt} Idt = d\left(\frac{L}{2} \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2\right) \sim \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (E_{\text{kin}})$

### 12.4 Wechselströme und -spannungen

1.  $\tilde{I} = I e^{i\omega t} + cc$ , wobei  $cc$  das konjugiert komplexe ist ( $\Rightarrow \tilde{I} = I e^{i\omega t} + I^* e^{-i\omega t}$ ) mit  $\tilde{I} \in \mathbb{R}; I, I^* \in \mathbb{C}$ .
2.  $\tilde{U} = U e^{i\omega t} + cc$  mit  $\tilde{U} \in \mathbb{R}; U, U^* \in \mathbb{C}$ .
3. Der Realteil beschreibt dabei jeweils die Amplitude.
4. Für lineare Bauelemente (elektrisch unabhängige  $R, C, L$ ) gilt Superpositionsprinzip.
5. Kirchhoffsche Regeln gelten weiterhin, wobei die jeweilige **Impedanz** (Wechselstromwiderstand) zu berücksichtigen ist.
6. Die **effektive Stromstärke** eines Wechselstroms ist definiert als derjenige Gleichstrom, der am gleichen ohmschen Widerstand die gleiche Wärmemenge erzeugt:  

$$P = RI_{eff}^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{P} dt = \frac{1}{T} \int_0^T R \tilde{I}^2 dt = \frac{R}{T} \int_0^T I^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{RI^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} RI^2$$

$$\Rightarrow I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} |I| \approx .707 |I|. \tag{12}$$

### 12.5 Impedanz einer Induktivität

1. Analog zum Gleichstrom:  $\tilde{U} = -EMK = L \frac{d\tilde{I}}{dt}$ .
2. Für einen sinusförmigen Strom  $\tilde{I} = I e^{i\omega t}$  gilt:  $\tilde{U} = \underbrace{Li\omega}_{Z_L} \tilde{I}$ ;  $Z_L = i\omega L$  bezeichnet man als **induktive Impedanz**.
3. **Spannung eilt dem Strom voraus**, (idealisiert um  $\frac{\pi}{2}$ ).

### 12.6 Impedanz einer Kapazität

1. Analog zum Gleichstrom:  $\tilde{U}_C = \frac{\tilde{Q}}{C} = \frac{\int \tilde{I} dt}{C} = \underbrace{\frac{1}{i\omega C}}_{Z_C} \tilde{I} = \frac{1}{\omega C} I e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ , mit der **kapazitiven Impedanz**  

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}.$$
2. **Strom eilt der Spannung voraus**, (idealisiert um  $\frac{\pi}{2}$ ).

### 12.7 Impedanz eines ohmschen Widerstandes

- Die Impedanz eines ohmschen Widerstandes ist  $Z_R = R$ .

### 12.8 Blind- und Wirkleistung

- Kondensator und Spule sind nicht dissipativ  $\Rightarrow$  alle gespeicherte Energie wird wieder abgegeben; der Widerstand hingegen ist dissipativ.
- Nun kann man jedes Bauelement durch eine effektive Impedanz repräsentieren:  $Z_{eff} = R + iX$ , mit dem ohmschen Widerstand  $R$  und dem Blindwiderstand  $X$  (**Reaktanz**).
- In zeitlichen Mittel gilt dann mit (o.B.d.A.):

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= I_0 \cos(\omega t) = I_0 \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) & \text{und} & & \tilde{U} &= \tilde{I} \cdot Z_{eff} = I_0 R \cos(\omega t) - I_0 X \sin(\omega t) \\ \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{U} \tilde{I} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{R I_0^2 \cos^2(\omega t) dt}_{= \frac{I_0^2 R}{2} \text{ (Wirkleistung)}} - \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{I_0^2 X \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt}_{= 0 \text{ (Blindleistung)}} \end{aligned}$$

### 12.9 Der RLC-Kreis

- Nach Faraday:  $U(t) - IR - \frac{Q}{C} = L\dot{I}$  mit  $\tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$  und  $\tilde{U} = U_0 e^{i\omega t}$ , wobei  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ :  
 $\frac{d^2 \tilde{I}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{1}{LC} \tilde{I} = \frac{1}{L} \frac{d\tilde{U}}{dt} \Leftrightarrow I_0(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{R}{L}\omega) = i\frac{\omega}{L} U_0 e^{i\varphi}$ .

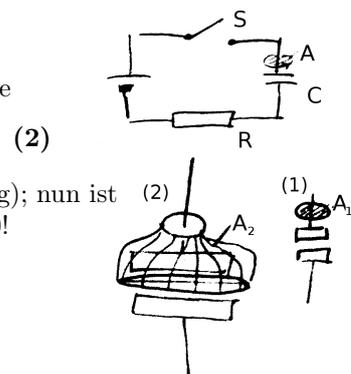
Aus der Multiplikation mit dem konjugiert komplexen ergibt sich:  $I_0^2 = \frac{(\frac{U_0}{L})^2}{(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega})^2 + (\frac{R}{L})^2}$ .

(vgl. Lorentzkurve)

## 13 Maxwellsche Gleichungen und elektromagnetische Wellen

### 13.1 Ein Problem mit dem Ampèreschen Gesetz

- Wenn der Schalter geschlossen wird, fließt ein Strom  $I(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ .
- Ampère: Strom  $\Rightarrow$  Magnetfeld  $\oint_C \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_A \vec{j} d\vec{A}$ .  
Wie wir die Fläche verbiegen, ist egal. Das Ampèresche Gesetz muss für alle gelten, aber:  $\begin{cases} \int_{A_1} \vec{j} d\vec{A} = \mu_0 I \neq 0 \\ \int_{A_2} \vec{j} d\vec{A} = 0 \end{cases}$ .
- Noch ein Problem: Wir hatten immer gesagt  $\oint \vec{j} d\vec{A} = 0$  (Ladungserhaltung); nun ist aber  $A_1 + A_2$  eine geschlossene Fläche und die Summe der Integrale ist  $\neq 0$ !



### 13.2 Maxwells Lösung - der Verschiebungsstrom

- Das  $\vec{E}$ -Feld im Kondensator berechnete sich nach Gauß wie folgt:  $\mathcal{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ .
- Nun betrachten wir den elektrischen Fluss durch  $A_2$  (plattenförmige Fläche zwischen den Kondensatorplatten und einem domförmigen Teil):

$$\Phi_{el} = \iint_{A_2} \vec{E} d\vec{A} = \iint_{\text{Platte}} \vec{E} d\vec{A} + \underbrace{\iint_{\text{Dom}} \vec{E} d\vec{A}}_{=0, \text{ da } \vec{E}=0} = \iint_{\text{Platte}} \vec{E} d\vec{A} = \vec{E} \iint_{\text{Platte}} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} A = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5)$$

- Der Strom muss gleich der Änderung der Ladung auf den Platten sein:  $I = \frac{dQ}{dt}$ . (6)

- Differenziere (5) und benutze (6):  $\frac{d}{dt} \Phi_{el} = \frac{d}{dt} \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{I}{\epsilon_0}$ .

- Es fließt - wie gesagt - kein Strom durch  $A_2$ . Es gibt aber eine Größe ( $\frac{d}{dt} \Phi_{el}$  durch diese Fläche), die genauso groß wie  $\mu_0 I$  ist (mit entsprechendem Vorfaktor  $\mu_0 \epsilon_0$ ). Nennen wir diese Größe einen Strom (**Maxwellschen Verschiebungsstrom**) und berücksichtigen ihn entsprechend im Ampèreschen Gesetz, so stimmt wieder alles:

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 (I + I_D) = \mu_0 \iint (\vec{j} + \vec{j}_D) d\vec{A} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt} \quad (8)$$

6. Was ist mit der Ladungserhaltung:  $\oint \vec{j} d\vec{A} + \oint \vec{j}_D d\vec{A} = \oint \vec{j} d\vec{A} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} d\vec{A} = \oint \vec{j} d\vec{A} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0$ ,

wenn 
$$\oint \vec{j} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} Q_{\text{eingeschlossen}}!$$

### 13.3 Maxwell'sche Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & \oint \vec{E} d\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} & \text{(Gaußsches Gesetz)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \oint \vec{B} d\vec{A} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \oint \vec{E} d\vec{r} &= -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A} & \text{(Faradaysches Gesetz)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \oint \vec{B} d\vec{r} &= \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} d\vec{A} & \text{(Ampèresches Gesetz)} \end{aligned}$$

### 13.4 Wellengleichung

1. Annahmen:

Vakuum ( $\mu = 1$ ), keine freien Ladungen ( $Q = 0$ ), keine Ströme ( $I = 0$ ), ebene Felder ( $\vec{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$ ), mit  $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x(z)$  und  $B_y = B_y(z)$ .

2. Faraday für diesen Fall wird dann zu:

$$\begin{aligned} \int \vec{E} d\vec{r} &= \underbrace{\int_{(x=0,y=0,z=z_0)}^{(x=0,y=0,z=z_0+\Delta z)} \vec{E} d\vec{r}}_{=0 (\vec{E}_\perp d\vec{r})} + \underbrace{\int_{(x=0,y=0,z=z_0+\Delta z)}^{(x=\Delta x,y=0,z=z_0+\Delta z)} \vec{E} d\vec{r}}_{=\mathcal{E}_x(z_0+\Delta z)\Delta x} + \underbrace{\int_{(x=\Delta x,y=0,z=z_0+\Delta z)}^{(x=\Delta x,y=0,z=z_0)} \vec{E} d\vec{r}}_{=0 (\vec{E}_\perp d\vec{r})} + \underbrace{\int_{(x=\Delta x,y=0,z=z_0)}^{(x=0,y=0,z=z_0)} \vec{E} d\vec{r}}_{=-\mathcal{E}_x(z_0)\Delta x} \\ &= [\mathcal{E}_x(z_0 + \Delta z) - \mathcal{E}_x(z_0)] \Delta x \\ &= -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} B_y(z_0) \underbrace{\Delta z \Delta x}_{\Delta A} \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \implies \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_x(z_0, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} B_y(z_0, t) \end{aligned} \tag{12}$$

6. Ampère für diesen Fall wird dann zu:

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} d\vec{r} &= \underbrace{\int_{(x=0,y=0,z=z_0)}^{(x=0,y=\Delta y,z=z_0)} \vec{B} d\vec{r}}_{=B_y(z_0)\Delta y} + \underbrace{\int_{(x=0,y=\Delta y,z=z_0)}^{(x=0,y=\Delta y,z=z_0+\Delta z)} \vec{B} d\vec{r}}_{=0 (\vec{B}_\perp d\vec{r})} + \underbrace{\int_{(x=0,y=\Delta y,z=z_0+\Delta z)}^{(x=0,y=0,z=z_0+\Delta z)} \vec{B} d\vec{r}}_{=-B_y(z_0+\Delta z)\Delta y} + \underbrace{\int_{(x=0,y=0,z=z_0+\Delta z)}^{(x=0,y=0,z=z_0)} \vec{B} d\vec{r}}_{=0 (\vec{B}_\perp d\vec{r})} \\ &= -[B_y(z_0 + \Delta z) - B_y(z_0)] \Delta y \\ &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E} d\vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \mathcal{E}_x(z_0) \Delta z \Delta y \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \implies -\frac{\partial}{\partial z} B_y(z_0, t) &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_x(z_0, t) \end{aligned} \tag{13}$$

7.  $\frac{\partial}{\partial z}$  (12) +  $\frac{\partial}{\partial t}$  (13):  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial t \partial z} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial t^2}$

$\Leftrightarrow$  
$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial t^2}} \tag{14}$$

8.  $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}$  (12) +  $\frac{\partial}{\partial z}$  (13):  $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial z^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial t^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial t \partial z}$

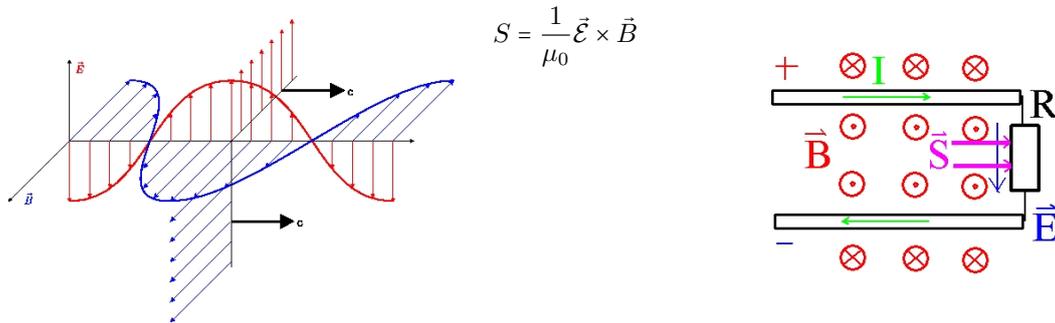
$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial t^2}} \tag{15}$$

### 13.5 Eine Lösung der Wellengleichung, Wellengeschwindigkeit

1. Ansatz:  $\mathcal{E}_x(z, t) = A \sin(kz - \omega t)$   
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} = -k^2 A \sin(kz - \omega t), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kz - \omega t).$
2. Einsetzen:  $-k^2 A \sin(kz - \omega t) = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 A \sin(kz - \omega t) \Leftrightarrow k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$
3. Wellengeschwindigkeit:  $A \sin(kz - \omega t) = A \sin(k(z + \Delta z) - \omega(t + \Delta t)) \Rightarrow k\Delta z - \omega\Delta t = 0 \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = v = \frac{c}{n}.$   
 $\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 300000 \frac{km}{s}.$

### 13.6 Der Poynting-Vektor

1. Die Energie pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit, die durch die elektrischen und magnetischen Felder transportiert wird, ist durch den **Poynting-Vektor** gegeben:



$$S = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{B}$$

Ein Draht idealisiert als:

Zylinderkondensator:  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$

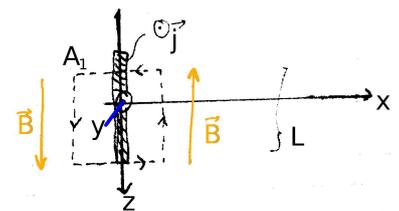
$\Phi_{mag} \approx B \cdot A, L = \mu_0 \frac{l}{\pi} \Rightarrow$  Resonanzfrequenz eines Drahtes:  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$  (Kupfer,  $l = 10 \text{ cm}$ ).

### 13.7 Ein einfacher Fall eines sich ausbreitenden Feldes

1. Eine unendlich ausgedehnte Schicht in  $x - y$ -Ebene, die zunächst in Ruhe, dann aber ruckartig in  $y$ -Richtung bewegt wird ( $\vec{j} = \frac{\text{Strom}}{\Delta y} \left[ \frac{A}{m^2} \right]$ ).
3. Kein statisches  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld (vgl. Gold-Folie  $\rightarrow$  positive Atomrümpfe).
4. Nach Ampère (ohne Maxwell):

$$\oint_{A_1} \vec{B} d\vec{s} = 2 L B = \mu_0 I = \mu_0 \int_{A_1} \vec{j} d\vec{A} = \mu_0 j L = \frac{j L}{\epsilon_0 c^2} \Rightarrow B = \frac{j}{2\epsilon_0 c^2}. \quad (30)$$

7. Aufgrund der Geometrie  $\Rightarrow$  homogene Feldverteilung, jedoch Ausbreitungsgeschwindigkeit berücksichtigen!  
 Dabei durch Bewegung der Schicht  $\Rightarrow$  veränderliches Magnetfeld  $\Rightarrow$  erzeugt  $\mathcal{E}$ -Feld  $\Rightarrow$  wieder Magnetfeld  $\Rightarrow$  ...



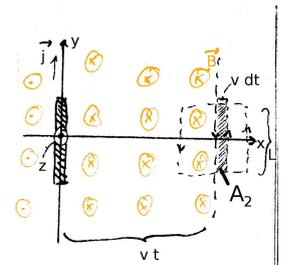
Also: **elektromagnetische Welle!**

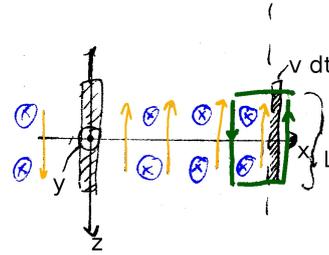
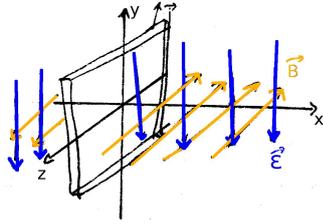
9. Wird die Fläche  $A_1$  infinitesimal klein, so bleibt dort  $\frac{d}{dt} \int \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}$  vernachlässigbar klein  $\Rightarrow$  (30) gilt für das gesamte  $\vec{B}$ -Feld.

$$12. d\Phi_m = \int \vec{B}(t + dt) d\vec{A} - \int \vec{B}(t) d\vec{A} = \oint_{A_2} \vec{B} d\vec{A} = -B v dt L.$$

$$\dot{\Phi}_m = \frac{d\Phi_m}{dt} = -B v L = -\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = -\mathcal{E} L$$

(da  $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld aus Symmetriegründen parallel zur Schicht und nur im Magnetfeld.)  
 $\Rightarrow \mathcal{E} = B v.$





- $\oint \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} d\vec{A}$ ; da  $\vec{j}$  im Integrationsgebiet 0 ist:  
 $\Rightarrow -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} BL = -\frac{d}{dt} \int \mathcal{E} L v dt \Leftrightarrow c^2 B = \mathcal{E} v \Rightarrow \boxed{v = c}$ .
- Lässt man die Schicht sich nun ruckartig in eine und dann ruckartig in die entgegengesetzte Richtung bewegen, so ergeben sich zeitlich versetzt entgegengesetzte, aber gleich große Felder  $\Rightarrow$  Impulse!

## 14 Hertze Dipolstrahlung

### 14.1 Dipolstrahlung

- Positive Ladung fliegt nach oben, negative nach unten  $\Rightarrow$  Strom  $\vec{I}$  nach oben.
- Nach Erreichen des Umkehrpunktes fließt der Strom in die andere Richtung. Diese Stromumkehr spürt wegen  $c < \infty$  zunächst nur die unmittelbare Umgebung; diese ist entgegengesetzt zu den weiter äußeren.

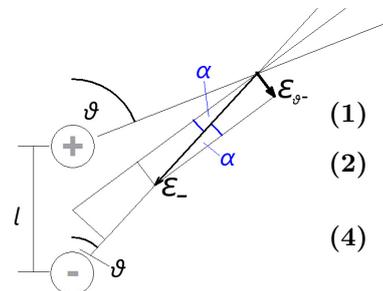
- Abschnürung des Feldes:

### 14.2 Experimentelle Darstellung eines Dipols

- Dipol:
- Die Spannung hat Bäuche an den Enden des Dipols, der Strom in der Mitte.
- In Medium gilt für Resonanz:  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $C \sim \epsilon_r \Rightarrow \omega \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$  und  $c = \lambda \nu = \lambda \frac{\omega}{2\pi}$ .

### 14.3 Leistung eines Dipol-Senders

- Zur Berechnung von  $\mathcal{E}_\vartheta$  betrachten wir nur den von der negative Ladung erzeugten Anteil; der Anteil der positiven ist ca. genauso groß (mit  $\frac{l}{r} \ll 1$ ).
- Mit  $\alpha$  können wir  $\frac{1}{2} \mathcal{E}_\vartheta = \mathcal{E}_\vartheta^-$  berechnen:  $\frac{1}{2} \mathcal{E}_\vartheta = \mathcal{E} \sin(\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \sin(\alpha)$ .
- Aus Skizze folgt:  $\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{l}{r} \sin(\vartheta)$ .
- (2) in (1) mit  $p = q \cdot l \Rightarrow \mathcal{E}_\vartheta = \frac{p \sin(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ .
- Für einen oszillierenden Dipol unter Vernachlässigung von Abstrahlung und endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit:  $\mathcal{E}_\vartheta(t) = \frac{p_0 \sin(\omega t) \sin(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ .
- Bis zu welchem Abstand  $r$  ist (4) anwendbar? Dazu vergleichen wir die Beziehungen von  $\mathcal{E}$  und  $B$  betragsmäßig, die einerseits für ebene Wellen gilt:



$$\mathcal{E} = c \cdot B$$

mit einer Beziehung aus dem Ampèreschen Gesetz:  $\oint \vec{B} d\vec{r} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_{A_1} \vec{E} d\vec{A}$ .

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_{A_1} \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (r^2 \pi \mathcal{E}_\vartheta) = \frac{1}{c^2} \pi r^2 \omega \mathcal{E}_\vartheta = \oint \vec{B} d\vec{r} = 2\pi r B.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} r \frac{c}{\lambda} \mathcal{E} = \boxed{B = \frac{1}{2} \frac{1}{c} r \frac{1}{\lambda} \mathcal{E}} \quad \text{mit } \lambda = \frac{c}{\omega}.$$

(6)

7. Das Dipolfeld hat i. Allg. nicht das richtige Verhältnis  $c = \frac{B}{E}$  für eine propagierende Welle. Es gibt aber einen gewissen Abstand, wo das der Fall ist. Dort findet die Abstrahlung statt  $\Rightarrow$  mit diesem  $\mathcal{E}$ - und  $B$ -Feld lässt sich über den Poynting-Vektor die abgestrahlte Leistung berechnen.
8. Bei  $r = \lambda$  stimmt das Verhältnis:  $\mathcal{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\lambda^3} \sin(\vartheta)$  und  $B = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 c\lambda^3} \sin(\vartheta)$ .
9.  $\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{B})$ ; dabei kennen wir die Felder nur bis  $r = \lambda$  einigermaßen zuverlässig:  

$$\Rightarrow P = \frac{p^2\omega}{12\pi\epsilon_0\lambda^3} = \frac{p^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$
10. Eine genaue Rechnung liefert:  $\Rightarrow P = \frac{p^2\omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$ . (Larmor-Formel) (9)
13. Eingesetzt in  $S$  oder  $P$ :  $S = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{e^2 v^2 \sin^2(\vartheta)}{\epsilon_0 c^3 r^2}, \quad P = \frac{1}{6\pi} \frac{e^2 v^2}{\epsilon_0 c^3}.$

## 15 Elektromagnetische Optik I : Reflexion & Brechung

### 15.1 Stetigkeit der Normalkomponente des $D$ -Feldes

1. Gegeben seien zwei Dielektrika mit den relativen Permeabilitäten  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ .
2. Wählen Gaußsche Fläche als Kreiszyylinder an Grenzfläche mit Deckeln parallel zur Grenzschicht.
3. Gaußsches Gesetz:  $\oint \vec{D} d\vec{A} =$  eingeschlossene freie Ladungen = 0.
4. Wir interessieren uns nur für die Grenzfläche  $\Rightarrow$  Dosenhöhe infinitesimal klein; wobei die Deckel in den verschiedenen Medien bleiben.  
 $\Rightarrow$  Fluss durch den Dosenmantel wird gegenüber dem durch die Deckel vernachlässigbar.  

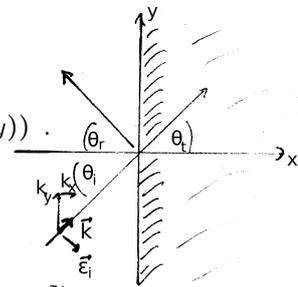
$$\Rightarrow \oint \vec{D} d\vec{A} = -D_x^{li} \Delta A + D_x^{re} \Delta A = 0.$$
5.  $\Rightarrow D_x^{re} \Delta A = D_x^{li} \Delta A$ , d.h. Normalkomponente ist an der Grenzschicht stetig. (1)

### 15.2 Stetigkeit der Tangentialkomponente des $\mathcal{E}$ -Feldes

1. Verwenden das Faradaysche Gesetz an rechteckigem, geschlossenem Weg senkrecht zur Grenzschicht mit dazu parallelen Teilen in beiden Medien:  $\oint \mathcal{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A}.$
2. Wir lassen  $\Delta x \rightarrow 0$  gehen ( $\Rightarrow$  Grenzschicht):  $\oint \mathcal{E} d\vec{r} = \int_0^{\Delta y} \mathcal{E}_y^{re} dy + \int_{\Delta y}^0 \mathcal{E}_y^{li} dy = 0 = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A}$   
 (da  $A$  gegen 0 geht)  $\Leftrightarrow \mathcal{E}_y^{re} = \mathcal{E}_y^{li}.$  (2)

### 15.3 Reflexions- und Brechungsgesetz

1. Gegeben sei eine Lichtwelle, die sich parallel zur  $(x, y)$ -Ebene ausbreitet, d.h. der Wellenvektor  $\vec{k} \parallel (x, y)$ -Ebene.
2. Vereinfachung:  $\mathcal{E}$  habe keine  $z$ -Komponente ( $\Rightarrow$  Welle polarisiert).
3. Einfallende ("incidente") Welle:  $|\vec{\mathcal{E}}_i| = \mathcal{E}_{0i} \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \mathcal{E}_{0i} \sin(\omega t + (k_x x + k_y y))$   
 $= \mathcal{E}_{0i} \sin(\omega t - k(x \cos(\theta_i) + y \sin(\theta_i)))$



4. Mit der Dispersionsrelation  $v = \frac{\omega}{k}$  vereinfacht sich das zu:  

$$|\vec{\mathcal{E}}_i| = \mathcal{E}_{0i} \sin\left(\omega_i \left[ t - \frac{x \cos \theta_i + y \sin(\theta_i)}{v_i} \right]\right).$$
 (3)
5. Dasselbe für die transmittierte und reflektierte Welle:  

$$|\vec{\mathcal{E}}_r| = \mathcal{E}_{0r} \sin\left(\omega_r \left[ t - \frac{x \cos \theta_r + y \sin(\theta_r)}{v_r} \right]\right), \quad |\vec{\mathcal{E}}_t| = \mathcal{E}_{0t} \sin\left(\omega_t \left[ t - \frac{x \cos \theta_t + y \sin(\theta_t)}{v_t} \right]\right).$$
 (4), (5)
6. Wende Stetigkeit der Normalkomponente von  $D$  an:  $D_x^{li} = D_x^{re} \Leftrightarrow \epsilon_1 \mathcal{E}_x^{li} = \epsilon_2 \mathcal{E}_x^{re} \Leftrightarrow \epsilon_1 (\mathcal{E}_{ix} + \mathcal{E}_{rx}) = \epsilon_2 \mathcal{E}_{tx}.$  (7)
7. Nach Skizze:  $\epsilon_1 (|\vec{\mathcal{E}}_i| \sin(\theta_i) + |\vec{\mathcal{E}}_r| \sin(\theta_r)) = \epsilon_t |\vec{\mathcal{E}}_t| \sin(\theta_t).$
8. (3), (5) in (7) bei  $x = 0$ :  

$$\epsilon_1 \mathcal{E}_{0i} \sin(\theta_i) \sin\left(\omega_i \left[ t - \frac{y \sin(\theta_i)}{v_i} \right]\right) - \epsilon_1 \mathcal{E}_{0r} \sin(\theta_r) \sin\left(\omega_r \left[ t - \frac{y \sin(\theta_r)}{v_r} \right]\right) = \epsilon_2 \mathcal{E}_{0t} \sin(\theta_t) \sin\left(\omega_t \left[ t - \frac{y \sin(\theta_t)}{v_t} \right]\right)$$
 (8)
9. Betrachte (8) bei  $y = 0 \Rightarrow A \sin(\omega_i t) + B \sin(\omega_r t) + C \sin(\omega_t t) = 0$  (9)  
 Und daraus folgt, (da für alle  $t$ ), dass  $\omega_i = \omega_r = \omega_t := \omega.$  (10)



### 15.7 Brechungsindex von Plasmen und Metallen

1. Annahmen: Plasma mit idealer Elektronenbeweglichkeit, Metalle mit frei beweglichen Elektronen.
2. Für Atome gilt (27); ein ideales Plasma hat keine Rückstellkräfte auf die Elektronen  $\Rightarrow \omega_0 = 0$  und statt

$$\text{Atomdichte } n \text{ die Elektronendichte } n_e: \epsilon_r = 1 - \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} =: 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{30}$$

$$\text{mit der Plasmafrequenz } \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}. \tag{31}$$

3. (30) scheint aus zwei Gründen problematisch zu sein:
  - a) für  $\omega > \omega_p$  ist  $\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1 \Rightarrow n = \sqrt{\epsilon_r} < 1 \Rightarrow c' = \frac{c}{n} > c$ .
  - b) für  $\omega < \omega_p$  ist  $\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 0 \Rightarrow n \in \mathbb{C}$ .

#### 15.7.1 1. Fall: $\omega > \omega_p$

4. Betrachten eine ebene Welle, deren elektrisches Feld die Form hat:  $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_z$ . (32)

5. Ein Maximum bewegt sich mit der Geschwindigkeit:  $k\Delta x - \omega\Delta t = 0 \Leftrightarrow v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$ . (33)

7. Nach (21) und (14) gilt  $v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$  und somit:  $\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\epsilon_r}$ . (35)

8. Mit (30) ergibt sich:  $\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \Rightarrow \omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2$ . (Dispersionsrelation) (36)

9. Mit (33) ergibt sich:  $\omega^2 = \frac{\omega^2}{v_p^2} c^2 + \omega_p^2 \Leftrightarrow 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_p^2} \Rightarrow v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ ; (37)

diese Phasengeschwindigkeit ist größer als  $c$ ! Mit ihr lässt sich aber keine Information verbreiten, daher macht das nichts.

10. Informationen überträgt man mit Impulsen (viele Wellen, unterschiedliche  $k$  und  $\omega$ ):

$$\mathcal{E}_z(x, t) = \int F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \int F(k) e^{i\Phi(k)} dk. \tag{38}$$

11. Für einen einigermaßen kurzen Puls braucht man ein breites Spektrum  $\Rightarrow F(k)$  ändert sich langsam,  $\Phi(k)$  ändert sich schnell mit  $k$ .

12. Integriert man über das Produkt einer nahezu konstanten Funktion mit einer schnell um 0 oszillierenden, so kommt dort ca. 0 heraus. Am ehesten liefern die Teile einen Beitrag, wo  $\Phi$  sich langsam ändert:

$$\frac{d\Phi}{dk} = \frac{d}{dk}(kx - \omega(k)t) = x - \frac{d\omega}{dk}t = 0.$$

13. Bei dieser Frequenz befindet sich dann das Maximum von (38), so dass gilt:  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . (39)

14.  $\frac{d}{d\omega}$  (36) ergibt:  $2\omega = 2kc^2 \frac{dk}{d\omega} \Rightarrow \underbrace{\frac{d\omega}{dk}}_{v_g} \underbrace{\frac{\omega}{k}}_{v_p} = c^2$ . (40)

15. Mit (37) schließlich:  $\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} v_g = c^2 \Rightarrow v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ . (41)

$\Rightarrow$  Für diesen Fall ist die Wurzel kleiner 1 und somit:  $v_g < c$ !

#### 15.7.2 2. Fall: $\omega < \omega_p$

16. (37) und (41) entnehmen wir, dass Phasen- und Gruppengeschwindigkeit imaginär werden; somit schwächt die Welle sich im Plasma ab.

17. Nach (36) gilt:  $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} =: i|k|$ . (42)

18. Entsprechend das  $\mathcal{E}$ -Feld:  $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 e^{i(i|k|x - \omega t)} = \mathcal{E}_0 e^{-|k|x} e^{i\omega t}$ . (43)

$\Rightarrow$  In  $x$ -Richtung eine stehende Welle mit mit  $t$  verschwindender Amplitude.

19. Dass die Welle reflektiert und nicht absorbiert wird, kann man mit Hilfe des Poynting-Vektors zeigen.

# 16 Strahlenoptik, Linsen und optische Instrumente

## 16.1 Der Übergang zur Strahlenoptik

1. Die Hierarchie der Optik:
  - a)  $\hbar \rightarrow 0$                       quantisierte vektorielle Felder (QED)
 

↓
  - b)                                      vektorielle Felder (Maxwell-Gleichungen)
 

↓
  - c) keine Polarisierung              skalare Wellen
 

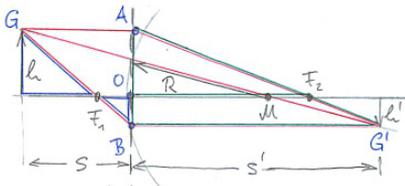
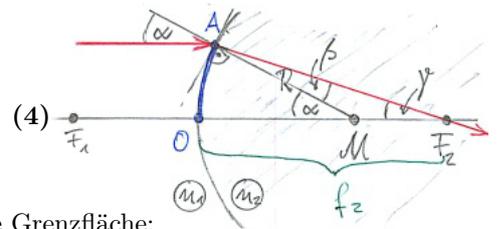
↓
  - d)  $\lambda \rightarrow 0$                         Strahlen
 

↓
2. Typische Probleme:
  - a) Quantenkryptographie und -informatik
  - b) Polarisationsoptik (typ. Vernachlässigung von Wellen)
  - c) Beugung, Fourieroptik
  - d) Design optischer Instrumente
4. Fermatsches Prinzip: Lichtstrahlen von  $A$  nach  $B$  wählen genau den Weg, auf dem die optische Weglänge minimal ist:
 
$$OPL = nl \tag{1}$$

## 16.2 Linsen

2. Brennweite einer sphärischen Grenzfläche (mit paraxialer Näherung!):

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R, \quad f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R.$$



3. Abbildung durch eine sphärische Grenzfläche:
 
$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{7}$$

7. Vorzeichenkonvention: Größen für virtuelle Bilder sind **negativ**.

9. **Linsenschleiferformel:**

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \tag{10}$$

11. **Vergenz:**  $V = \frac{1}{s}$  und  $V' = \frac{1}{s'}$ ; zur Beschreibung der Krümmung der Wellenfronten.

12. **Brechkraft:**  $P = \frac{1}{f}$ ; mit der Einheit  $\frac{1}{m} = 1$  Dioptrie.

13. In guter Näherung gilt dann:  $P = V + V'$

14. Für Linsensysteme gilt, ist  $d$  der Abstand zwischen den zwei Linsen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \tag{14}$$

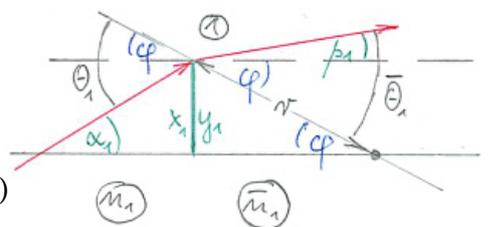
## 16.3 Matrixformalismus

1. Durch die paraxiale Näherung (Linearisierung des Brechungsgesetzes) bietet sich die Beschreibung mit linearer Algebra an.

2. Wir definieren den Strahlenvektor wie folgt:  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} n_1 \alpha_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{20}$

3. In einem System werden die einzelnen Grenzflächen aufsteigend durchnummeriert und Größen hinter einer Grenzfläche überstrichen ( $\Rightarrow n_1 \Theta_1 = \bar{n}_1 \bar{\Theta}_1$ ).

4. Sei  $\bar{y}$  der gebrochene Strahl, so gilt als Matrix für die Brechung: (mit dem Krümmungsradius  $r$  für beide Seiten der Grenzfläche).



$$\bar{y}_1 = R_1 \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\bar{n}_1 - n_1}{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}_1 \tag{28}$$

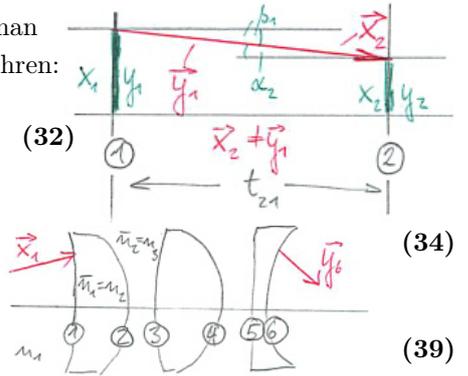
5. Da  $\vec{y}_1$  nun am Fusspunkt aufgestellt wird,  $\vec{x}_2$  aber an der Spitze, muss man beim Übergang zur nächsten Grenzschicht eine Transfermatrix  $T_{12}$  einführen:

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} n_2 \alpha_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = T_{12} \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_{21} & 1 \\ n_2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{n}_1 \beta \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

6. In Systemen gilt dann die Hintereinanderausführung:

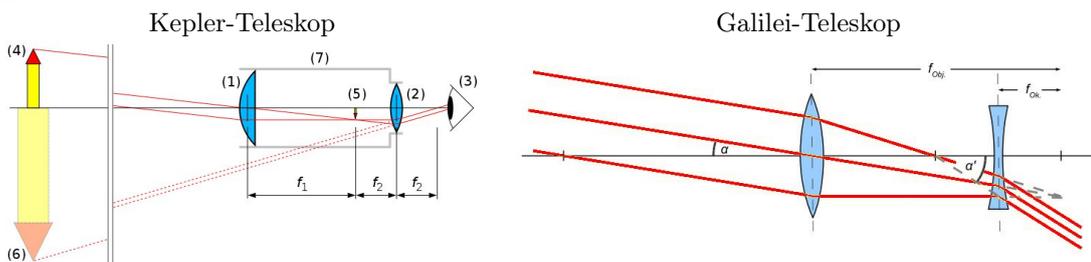
$$\vec{y}_6 = R_6 T_{65} R_5 T_{54} R_4 T_{43} R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1 \vec{x}_1 = M_{61} \vec{x}_1 \quad (34)$$

22. Sei nun  $M_{12} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , dann gilt:  $f_1 = -\frac{n_1}{B}$  bzw.  $f_2 = -\frac{n_2}{B}$ .



### 16.4 optische Instrumente

- Geometrische Linsenfehler:
  - sphärische Aberration,
  - Koma,
  - Astigmatismus,
  - Verzeichnung,
  - Bildfeldwölbung.
- Chromatische Aberration:  $n = n(\lambda) \Rightarrow f = f(\lambda)$ .
- Das **Auge**:
  - deutliche Sehweite  $s \approx 25\text{cm}$ ,
  - Sehwinkel  $\varepsilon$  mit  $\tan(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{1}{2} \frac{G}{s}$  ( $G$ -Gegenstandshöhe),
  - Auflösung  $\approx 300 \text{ dpi} \hat{=} 8,5 \mu\text{m}$ .
- Winkelvergrößerung:  $V = \frac{\text{Schwinkel } \varepsilon \text{ mit Instrument}}{\varepsilon_0 \text{ ohne Instrument}}$ .
- Lupe**: Sammellinse mit kurzer Brennweite  $\Rightarrow$  Gegenstand im Brennpunkt und somit parallele Strahlen hinter der Lupe (wie weit entfernt).
- Okular**: um chromatische Aberration zu minimieren, muss der Abstand der zwei dünnen Linsen  $d = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$  betragen.
- Mikroskop**: eine kurzbrennweitige Linse erzeugt ein virtuelles vergrößertes Bild, welches mit einem Okular betrachtet wird;  $V = \frac{(d-f_2)s_0}{f_1 f_2}$ . (Abbe: 1 Interferenzmaximum muss abgebildet werden.)
- Fernrohr**:



15. Durchgänge polarisierten Lichts können mit dem **Jones-Formalismus** beschrieben werden

$$\left( \text{Licht: } \vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}; \text{ (nichtlineare) Linsen: } 2 \times 2\text{-Matrizen} \right).$$