

Kosmologisches Prinzip:

Die Welt in 3 räumlichen Dimensionen ist in all ihren messbaren Eigenschaften immer und überall isotrop und homogen.

[bezogen auf Längenskalen von $\sim 500 \cdot 10^6$ ly]

Retroversum - der schon beobachtbar gewesene Teil des Minkowski-Diagramms [im Lichtkegel, in der Vergangenheit]

Im Moment sieht man nur die Ereignisse auf dem Lichtkegel.

lateinische Buchstaben $[a, b, \dots] \in \{1, 2, 3, 4\}$; griechische Buchstaben $[\alpha, \beta, \dots] \in \{1, 2, 3\}$; $x^4 = c_0 t$

Signatur $(+ + + -)$; $ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n$, Symmetrisch: $g_{mn} = g_{nm}$

Christoffel-Symbole: $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{am} [g_{mb,c} + g_{mc,b} - g_{bc,m}]$

Robertson-Walker-Metrik:

Es ist $g_{mn} = g_{nm}$, wegen Isotropie $\Rightarrow g_{\alpha 4} = 0$.

Via $x^4 := \sqrt{-g_{44}(\tilde{x}^4)} \tilde{x}^4$ kann immer $g_{44} = -1$ gewählt werden. \Leftrightarrow **Weyl'sches Postulat:**

Die Weltlinien von Galaxien sind Geodäten, die auf raumartigen Hyperflächen senkrecht stehen.

Isotropie zu jeder Zeit \Rightarrow Separabel in Raum und Zeit: $\tilde{g}_{\alpha\beta}(x^\gamma, t) = \tilde{R}^2(t) g_{\alpha\beta}$

Für Raumschnitte $[t = const.]$ folgt aus Homogenität, dass die Raumkrümmung überall konstant sein muss \Rightarrow

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K [g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}] . \quad [\text{wobei dann Ricci-Tensor } R_{\beta\delta} = 2K g_{\beta\delta}, \text{ Krümmungsskalar } \hat{R} = 6K]$$

Aufgrund Isotropie kugelsymmetrischer Ansatz $\Rightarrow ds^2 = \tilde{R}^2(t) \left[\frac{d\tilde{r}^2}{1 - K\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 \underbrace{d\Omega^2}_{= d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2} \right] - c_0^2 dt^2$

Reskalierung von $\tilde{R} := \frac{R}{\sqrt{K}}$ und $\tilde{r} = \sqrt{K} r$ und Definition von $\varepsilon = \begin{cases} +1 & , K > 0 \\ 0 & , K = 0 \\ -1 & , K < 0 \end{cases}$ liefert

$$ds^2 = R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \varepsilon r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] - c_0^2 dt^2 .$$

Mit $r(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & , \varepsilon = 1 & , 0 \leq \chi \leq \pi \\ \chi & , \varepsilon = 0 & , 0 \leq \chi < \infty \\ \sinh(\chi) & , \varepsilon = -1 & , 0 \leq \chi < \infty \end{cases}$ vereinfacht sich die Notation zu radialer Abstand $D := R\chi$
metrischer Abstand Rr

$$ds^2 = R^2(t) [d\chi^2 + r^2(\chi) d\Omega^2] - c_0^2 dt^2 .$$

Hubble-Parameter $H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$, $v(t) = \frac{dD}{dt} = H(t)D(t)$; Geschwindigkeits-Entfernungs-Relation

Geodätengleichung: $\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{lm}^k \frac{dx^l}{d\lambda} \frac{dx^m}{d\lambda} = 0$ zeitartig : $ds^2 < 0$
lichtartig : $ds^2 = 0$
raumartig : $ds^2 > 0$

Lagrange II: $\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$, $L = \left[\frac{ds}{d\lambda} \right]^2$.

Expansionsrotverschiebung: $\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{R(t_o)}{R(t_e)} =: 1 + z$, mit o - Observation, e - Emission, z - Rotverschiebung.

Es ist $R(t) \approx R(t_0) \left[1 + \overbrace{\frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}}{=: H_0} [t - t_0] + \frac{1}{2} \overbrace{\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)}}{=: -q_0 H_0^2} [t - t_0]^2 + \mathcal{O}([t - t_0]^3) \right]$,

mit dem Hubble-Parameter $H_0 = H(t_0)$, dem Verzögerungsparameter $q(t) = -\frac{\ddot{R}(t)R(t)}{\dot{R}^2(t)}$ [$q_0 = q(t_0)$].

$\frac{1}{H_0}$ heißt **Hubble-Zeit**; für $[t - t_0] \ll \frac{1}{H_0}$ spricht man von "kosmischer Nahzone" / "kosmischer Nachbarschaft".

In zweiter Näherung ergibt sich in der Nahzone die **Rotverschiebungs-Entfernungs-Relation**

$$H_0 D(t_0) = c_0 z - \frac{1}{2} [1 + q_0] c_0 z^2 + \mathcal{O}(z^3) \quad .$$

Für die **Leuchtkraft-Entfernung** D_L ergibt sich über den Fluss $F = \frac{L}{4\pi D_L^2}$ [Leuchtkraft L] für einen radiales Licht [$ds^2 = 0$] beobachtenden Beobachter [$\chi = \text{const.}, t = t_0$] in obiger Näherung

$$F = \frac{L}{4\pi r^2(\chi) R^2(t_0) [1+z]^2} \quad \text{und mit } r(\chi) = \chi + \mathcal{O}(\chi^3) \quad D_L \approx \chi R(t_0) [1+z] = D(t_0) [1+z] \quad .$$

$$\Rightarrow H_0 D_L = c_0 z + \frac{1}{2} [1 - q_0] c_0 z^2 + \mathcal{O}(z^3) \quad .$$

Kovariante Ableitung eines Tensors $\frac{D T_{c\dots}^{ab\dots}}{D x^i} = T_{c\dots;i}^{ab\dots} = \nabla_i T_{c\dots}^{ab\dots}$ ist ein Tensor, der im lokalen Inertialsystem mit der partiellen Ableitung übereinstimmt.

Christoffel-Symbole: $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{am} [g_{mb,c} + g_{mc,b} - g_{bc,m}]$

$[f_{;a} = f_{,a} \quad , \quad T^a_{;m} = T^a_{,m} + \Gamma^a_{mn} T^n \quad , \quad T_{a;m} = T_{a,m} - \Gamma^n_{am} T_n \quad , \quad T^a_{bc;d} = T^a_{bc,d} + \Gamma^a_{dm} T^m_{bc} - \Gamma^m_{bd} T^a_{mc} - \Gamma^m_{cd} T^a_{bm} \quad , \quad g_{ab;i} = 0 \quad]$

Einsteinsche Feldgleichungen:

[rein gravitativ! - Gravitationskonstante G]

$R^a_{msq} = \Gamma^a_{mq,s} - \Gamma^a_{sm,q} + \Gamma^a_{ns} \Gamma^n_{mq} - \Gamma^a_{nq} \Gamma^n_{ms}$ — Riemannscher Krümmungstensor $\quad , \quad R_{ik} = R^a_{iak}$ — Ricci-Tensor $\quad ,$
 $\hat{R} = R^i_i$ — Ricci-Skalar $\quad , \quad G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} \hat{R} g_{ik} + \Lambda g_{ik}$ — Einsteintensor, $\kappa = 8\pi \frac{G}{c_0^4}$, T_{ik} — Energie-Impuls-Tensor:

$$G_{ik} = \kappa T_{ik}$$

Bianchi-Identitäten $G^{mn}_{;n} = 0 \quad , \quad \text{also auch} \quad T^{mn}_{;n} = 0 \quad .$

Mit der Robertson-Walker-Metrik ergibt sich:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{c_0^2} \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \frac{\varepsilon c_0^2 + \dot{R}^2}{R^2} \right] g_{\mu\nu} \quad , \quad R_{\alpha 4} = 0 \quad , \quad R_{44} = -\frac{3}{c_0^2} \frac{\ddot{R}}{R} \quad , \quad \hat{R} = \frac{6}{c_0^2} \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\varepsilon c_0^2 + \dot{R}^2}{R^2} \right] \quad , \quad R_{mn} = R_{nm} \quad ,$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{c_0^2} \left[-2 \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\varepsilon c_0^2 + \dot{R}^2}{R^2} + \Lambda c_0^2 \right] g_{\mu\nu} \quad , \quad G_{\alpha 4} = 0 \quad , \quad G_{44} = \frac{3}{c_0^2} \frac{\varepsilon c_0^2 + \dot{R}^2}{R^2} - \Lambda \quad , \quad G_{mn} = G_{nm} \quad .$$

Für eine ideale Flüssigkeit mit Druck $p(t)$ und Massenvolumendichte $\mu(t)$ ist nun $T_{mn} = p g_{mn} + \left[\mu + \frac{p}{c_0^2} \right] u_m u_n$ und im Ruhesystem der Materie nach den Einsteinschen Feldgleichungen und $T^{mn}_{;n} = 0$:

$$[u^m = (0, 0, 0, c_0), [u^m u^n]_{;n} u_m = -c_0^2 u^n_{;n}]$$

Friedman-Lemaître-Gleichung: $3 \frac{\varepsilon c_0^2 + \dot{R}^2}{R^2} - \Lambda c_0^2 = \kappa \mu c_0^4$ [Friedman-Gleichung für $\Lambda = 0$]

Beschleunigungs-Gleichung: $2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\varepsilon c_0^2 + \dot{R}^2}{R^2} - \Lambda c_0^2 = -\kappa p c_0^2$

Energiebilanz-Gleichung: $\dot{\mu} + \left[\mu + \frac{p}{c_0^2} \right] 3 \frac{\dot{R}}{R} = 0$

[Wobei von diesen 3 Gleichung im Allgemeinen nur 2 unabhängig voneinander sind.]

Als dritte Gleichung zur Bestimmung der 3 unbekanntem $R(t), \mu(t), p(t)$ also die Zustandsgleichung: $\mu = \mu(p) \quad .$

Typisch $p = w \mu c_0^2 \quad , \quad w = \begin{cases} 0 & , \text{Staub} \\ \frac{1}{3} & , \text{Strahlung} \\ -1 & , \text{Vakuum} \end{cases} \quad .$

Friedmansche Staubkosmen: $\Lambda = 0$, $p = 0$.

Nach Energiebilanz $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -3\frac{\dot{R}}{R}$ ergibt sich eine Konstante für die Energie im Kosmos $\tilde{M} = R^3 \mu c_0^2$ und ein effektives

Expansionspotential $U_{\text{eff}} = -\frac{\kappa\tilde{M}c_0^2}{3}\frac{1}{R}$, so dass $\dot{R}^2 = -U_{\text{eff}} - \varepsilon c_0^2$. [$\dot{R}^2 \geq 0 \Rightarrow \exists R_{\text{max}} = \frac{\kappa\tilde{M}}{3}$ für $\varepsilon = 1$]

Lösungen für ein positiv expandierendes Universum:

[Konformzeit η : $d\eta^2 := \frac{c_0^2 dt^2}{R^2(t)}$]

$$\varepsilon = -1 : \quad T = \frac{\kappa\tilde{M}}{6} [\cosh(\eta) - 1] \quad , \quad c_0 [t - t_0] = \pm \frac{\kappa\tilde{M}}{6} [\eta - \sin(\eta)]$$

$$\varepsilon = 0 : \quad R(t) = \left[\frac{3\kappa\tilde{M}}{4} \right]^{\frac{1}{3}} [c_0 [t - t_0]]^{\frac{2}{3}} \quad \text{Einstein-de Sitter-Kosmos}$$

$$\varepsilon = 1 : \quad R = \frac{\kappa\tilde{M}}{6} [1 - \cos(\eta)] \quad , \quad c_0 [t - t_0] = \pm \frac{\kappa\tilde{M}}{6} [\eta - \sin(\eta)]$$

[Urknallmodelle mit $R(t_0) = 0$; anfangs alle Modelle $R(t) \propto [t - t_0]^{\frac{2}{3}}$.]

Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich die Dichte zu $\mu = \frac{3H^2}{\kappa c_0^4} = \frac{3H^2}{8\pi G} =: \mu_{\text{krit}}$; damit definiert sich der **Dichteparamter** $\Omega := \frac{\mu}{\mu_{\text{krit}}}$.

[Wobei nach heutiger Messung $H_0 \approx 70 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ und somit $\mu_{\text{krit},0} \approx 5,5 \frac{m_{\text{Proton}}}{\text{m}^3}$.]

Das Weltalter:

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt^{\text{exp. Univ.}} = \int_0^{R_0} \frac{1}{\dot{R}} dR \stackrel{\text{Staub}}{=} \frac{t_{H_0} - \text{Hubble-Zeit}}{H_0} \frac{1}{R_0} \int_0^{R_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \Omega_0 \frac{R_0}{R}}} dR = \begin{cases} t_{H_0} \left[\frac{1}{1 - \Omega_0} - \frac{\Omega_0}{2\sqrt{1 - \Omega_0}^3} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0}\right) \right] & , \varepsilon = -1 \\ \frac{2}{3} t_{H_0} & , \varepsilon = 0 \\ t_{H_0} \left[\frac{1}{1 - \Omega_0} - \frac{\Omega_0}{2\sqrt{\Omega_0 - 1}^3} \operatorname{arccos}\left(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0}\right) \right] & , \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Die Hubble-Zeit entspricht dabei gerade dem Weltalter für ein linear expandierendes Universum [$R(t) = \dot{R}_0 t$].

Für Staub [$p = 0$] ergibt sich außerdem:

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \right] \quad \text{[Mattig, 1958]}$$

$$H_0 D_L = \begin{cases} 2c_0 \left[[1 + z] - \sqrt{1 + z} \right] & \approx c_0 \left[z + \frac{1}{4} z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] & , \varepsilon = 0 \quad [\Rightarrow q_0 = \frac{1}{2}] \\ \frac{c_0}{q_0^2} \left[q_0 z + [1 - q_0] \left[1 - \sqrt{1 + 2q_0 z} \right] \right] & \approx c_0 z + \frac{1}{2} [1 - q_0] c_0 z^2 + \mathcal{O}(z^3) & , \varepsilon = 1 \quad [\Rightarrow q_0 > \frac{1}{2}] \end{cases}$$

[Rotverschiebungs-Entfernungs-Relation für die Leuchtkraftentfernung - vgl. oben]

Friedmansche Staubkosmen: $\Lambda = 0$, $p = \frac{1}{3} \mu c_0^2$.

Auch hier ergibt sich mit der Energiebilanz $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -4\frac{\dot{R}}{R}$ eine Konstante für die Energie im Kosmos $\tilde{A} = R^4 \mu c_0^2$ und

$U_{\text{eff}} = -\frac{\kappa\tilde{A}c_0^2}{3}\frac{1}{R^2}$ mit wiederum $\dot{R}^2 = -U_{\text{eff}} - \varepsilon c_0^2$.

Lösungen für ein positiv

expandierendes Universum

mit Urknall [$R(t_0) = 0$]:

$$R(t)^2 = \begin{cases} c_0^2 [t - t_0]^2 + 2\sqrt{\frac{\kappa\tilde{A}}{3}} c_0 [t - t_0] & , \varepsilon = -1 \\ 2\sqrt{\frac{\kappa\tilde{A}}{3}} c_0 [t - t_0] & , \varepsilon = 0 \\ -c_0^2 [t - t_0]^2 + 2\sqrt{\frac{\kappa\tilde{A}}{3}} c_0 [t - t_0] & , \varepsilon = 1 \end{cases}$$

[Urknallmodelle mit $R(t_0) = 0$; anfangs alle Modelle $R(t) \propto [t - t_0]^{\frac{1}{2}}$.]

Mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz erkennt man: $\mu c_0^2 \propto T^4$, $\mu c_0^2 \propto \frac{1}{R^4} \Rightarrow T \propto \frac{1}{R} \Rightarrow$ "heißer Urknall" .

Der Kosmos ist dabei weder ein reiner Staub-, noch ein reiner Strahlungskosmos:

$$H^2 = \frac{\kappa c_0^4}{3} \left[\frac{R_0^3}{R^3} \mu_0^{\text{Staub}} + \frac{R_0^4}{R^4} \mu_0^{\text{Strahlung}} \right] - \frac{\varepsilon c_0^2}{R^2} .$$

Astronomische Größen:

[1 pc = 3,085 677 6 · 10¹⁶ m]

Leuchtkraft-Entfernung D_L [m], Leuchtkraft L [W], bolometrische Flussdichte $F = \frac{L}{4\pi D_L^2} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$, **Größenklasse** m

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{2}{5}[m_2 - m_1]} \Leftrightarrow m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg\left(\frac{L_1}{L_2}\right) + 5 \lg\left(\frac{D_{L2}}{D_{L1}}\right)$$

Standardentfernung $D_{L0} := 10 \text{ pc}$, dort **absolute Helligkeit** $M = m_2 - 5 \lg\left(\frac{D_{L2}}{10 \text{ pc}}\right)$, **Entfernungsmodul** $m_2 - M$
 Sterne, deren absolute Helligkeit bekannt sind heißen "**Standardkerzen**" [Cepheiden, Supernovae].

Cepheiden:

[Große Magellansche Wolke [LMC]: $\sigma = -2,765$, $m_0 = 17,044$, $D_L = 50,1 \text{ kpc} \pm 3,1 \text{ kpc}$]

Perioden [P]-Helligkeits [m]-Beziehung: $\bar{m} = \sigma \lg\left(\frac{P}{d}\right) + m_0$

Mit der *Annahme*, dass dies überall im beobachtbaren Kosmos [i.e. $\forall \vec{r}, \forall t$ vor heute] gilt, ergibt sich:

$$\bar{M} = \sigma \lg\left(\frac{P}{d}\right) - 5 \lg\left(\frac{D_L}{10 \text{ pc}}\right) + m_0 .$$

Supernovae Ia [SNe Ia]: $M_{\text{max}} = -19,52 \pm 0,07$

Es gibt verschiedene Pulsationsveränderliche, z.B.: $M_\delta \text{ Cepheiden} \approx M_W \text{ Virginis} - 1,5$.

In Beobachtung kosmische Zeitdilatation: $\Delta t_0 = [1 + z]\Delta t_e$.

Mit der Näherung obiger Mattig-Formel ergibt sich für Friedman-Kosmen:

$$m = 5 \lg\left(\frac{c_0 z}{\text{km/s}}\right) + M + 25 - 5 \lg\left(\frac{H_0}{\text{km}/(\text{s Mpc})}\right) + \overbrace{5 \lg\left(1 + \frac{1}{2}[1 - q_0]z\right)}^{\approx 1,086 [1 - q_0]z}$$

Plancksches Strahlungsgesetz: $\rho_\lambda(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi h c_0}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{h c_0}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda \Leftrightarrow \rho_\nu(\nu, T) d\nu = 8\pi h \left[\frac{\nu}{c_0}\right]^3 \frac{1}{e^{\frac{h \nu}{k_B T}} - 1} d\nu$

Die jeweiligen Maxima sind: über λ bei $\lambda_{\text{max}} = \frac{h c_0}{[W(-\frac{3}{3}) + 3] k_B T}$, mit $W(-\frac{3}{3}) + 3 \approx 2,821 439$

über ν bei $\nu_{\text{max}} = \frac{[W(-\frac{5}{5}) + 5] k_B T}{h}$, mit $W(-\frac{5}{5}) + 5 \approx 4,965 114$

und der Lambertschen W -Funktion $W(z) [z = W(z) e^{W(z)}]$, $z \in \mathbb{C}$

Bei Expansion gilt $d\rho_\nu = d\rho_{\nu,0} [1 + z]^4$.

Mit $T_0 = 2,725 \text{ K}$ der Hintergrundstrahlung heute ergibt sich für die bolometrische Energiedichte

$$\epsilon_0 = \frac{8\pi^5 [k_B T_0]^4}{15 [hc_0]^3} = 0,26 \frac{\text{eV}}{\text{cm}^3} .$$

[Entsprechend $\mu_{R0} = \frac{\epsilon_0}{c_0^2} = 4,64 \cdot 10^{-34} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 2,8 \cdot 10^{-4} \frac{m_{\text{Proton}}}{\text{m}^3}$ und also $\Omega_{R0} = \frac{\mu_{R0}}{\mu_{\text{krit}}} = 5,04 \cdot 10^{-5}$.]

Aus $dn = \frac{d\epsilon}{h\nu}$ ergibt sich die Anzahldichte der Photonen zu $n_0 = 16\pi \left[\frac{k_B T_0}{h c_0} \right]^3 \zeta(3) = 410,5 \frac{1}{\text{cm}^3} .$

Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(z)$ [$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$, $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(z) > 1$]

Mit der **kosmologischen Konstante Λ** :

Friedman-Lemaître-Gleichung: $3 \frac{\epsilon c_0^2 + \dot{R}^2}{R^2} - \Lambda c_0^2 = \kappa \mu c_0^4$

Beschleunigungs-Gleichung: $2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\epsilon c_0^2 + \dot{R}^2}{R^2} - \Lambda c_0^2 = -\kappa p c_0^2$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{\kappa c_0^4}{6} \left[\overbrace{\mu + 3 \frac{p}{c_0^2}}^{>0: \text{bremst Expansion}} \right] + \underbrace{\frac{\Lambda c_0^2}{3}}_{>0: \text{beschleunigt Expansion}}$$

Der Einstein-Kosmos:

[“matter without motion” - statisches Universum]

Annahmen: $p = 0$, $\dot{R} = 0$, $\ddot{R} = 0$, $\mu \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon}{R^2} - \Lambda = 0 \quad , \quad 2 \frac{\epsilon}{R^2} - \Lambda = \kappa \mu c_0^2$$

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{1}{2} \kappa \mu c_0^2 =: \Lambda_E \quad , \quad \epsilon = +1 \quad , \quad R = \sqrt{\frac{2}{\kappa \mu c_0^2}} =: R_E .$$

Für die gesamte Masse ergibt sich dann $\tilde{m}_E = \underbrace{2\pi^2 R_E^3}_{\text{Volumen einer 3-Sphäre}} \mu .$

Volumen einer 3-Sphäre

$$[\text{für } \mu = 5 \cdot 10^{-30} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}: \Lambda_E = 4,7 \cdot 10^{-53} \frac{1}{\text{m}^2}, R_E = 4,7 \text{ Gpc}, \tilde{m}_E = 1,6 \cdot 10^{23} \tilde{m}_\odot]$$

Friedman-Lemaître-Kosmen:

Annahmen: Staub-Kosmos $p = 0$, $\Lambda \neq 0$

[keine Strahlung]

$$\dot{R}^2 = \frac{\kappa \tilde{M} c_0^2}{3} \frac{1}{R} + \frac{1}{3} \Lambda c_0^2 R^2 - \epsilon c_0^2$$

=: $-U_{\text{eff}}$

Man sieht: für $R \rightarrow 0$: $R \propto t^{\frac{2}{3}}$, für $R \rightarrow \infty$: $R \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c_0 t}$.

Für $\epsilon = 0$ lässt sich das Ergebnis zu folgendem bestimmen: $R(t) = \sqrt[3]{\frac{\kappa \tilde{M}}{\Lambda}} \sinh^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{3\Lambda} s c_0 t \right)$

Mit $\Omega_M = \frac{\mu}{\mu_{\text{krit}}} = \frac{8\pi G}{3H^2} \mu$, $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c_0^2}{3H^2}$, $\Omega_K = -\frac{\epsilon c_0^2}{R^2 H^2}$ lässt sich auch schreiben:

Friedman-Lemaître-Gl.: $1 = \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K$, Beschleunigungs-Gl.: $0 = q + \frac{1}{2} [\Omega_K - 1 + 3\Omega_\Lambda]$ $\Rightarrow q = \frac{1}{2} \Omega_M - \Omega_\Lambda .$

[Heute beobachtet: $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0,7$, $\Omega_{M 0} \approx 0,3$, $\Omega_K \approx 0$ [$\pm 0,02$]] $\Rightarrow \epsilon \approx 0$, $q_0 \approx -0,55$, $\Lambda_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-52} \frac{1}{\text{m}^2}$.

Wobei $\Omega_{M 0}|_{\text{sichtbare baryonische Materie}} \approx 0,04$, $\Omega_{M 0}|_{\text{dunkle Materie}} \approx 0,26$.]

Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich das heutige Weltalter zu: $t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{1 - \Omega_{\Lambda 0}}} \right)$. [$\approx 13,5 \cdot 10^9$ a]

de Sitter-Kosmen:

["motion without matter" - materiefreies Universum]

Annahmen: $\mu = 0$, $\Lambda \neq 0$.

$$\Rightarrow \text{Friedman-Lemaître-Gl.: } \dot{R}^2 = \frac{1}{3} \Lambda c_0^2 R^2 - \varepsilon c_0^2$$

Lösungen: $\varepsilon = 0 : R = R_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c_0 t}$; $\varepsilon = -1 : R = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c_0 t \right)$; $\varepsilon = 1 : R = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c_0 t \right)$.

Horizonte im Universum:

Konformzeit: $R^2 d\eta^2 \stackrel{!}{=} c_0^2 dt^2$ $\Rightarrow ds^2 = 0 = R^2 [d\chi^2 - d\eta^2]$ radialer Lichtkegel: $\chi = \pm \eta + \eta_i$

Der Teilchenhorizont von Beginn zu t_i und Beobachtung zu t_0 : $\chi_P = \int_{t_i}^{t_0} \frac{c_0 dt}{R} = \eta_0 - \eta_i$.

Hubble-Kugel: Fluchtgeschwindigkeit eines Objekts v in Entfernung einer Hubble-Länge $D_H = \frac{c_0}{H}$ ist $v(t) = c_0$.

Für $R(t) = K [c_0 t]^\alpha$, $K = \text{const.}$, $\alpha \in (0, 1)$ und $\varepsilon = 0$ findet man:

- Urknall bei $t = 0$

- endlicher Teilchenhorizont $\chi_P(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{d[c_0 t]}{|K [c_0 t]^\alpha|} = \frac{[c_0 t_0]^{\alpha-1}}{K [1 - \alpha]}$

- Hubble-Größen: $H = \frac{\alpha}{t}$, $D_H = \frac{c_0 t}{\alpha}$

- radiale Horizontentfernung zu t_0 : $D_P(t_0) = R(t_0) \chi_P(t_0) = \frac{1}{q} D_{H_0}$ mit $q = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$

- Teilchengeschwindigkeit am Horizont: $v_G(t_0) = H_0 D_P(t_0) = \frac{c_0}{q}$ [mit $q < 1$ für $\alpha > \frac{1}{2}$]
 $v_G > c_0$ ist kein Problem, da v_G nicht beobachtbar.

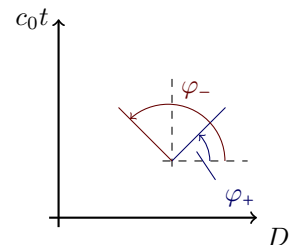
[Einstein-de Sitter-Kosmos: $\alpha = \frac{2}{3}$]

Die Rotverschiebung der am weitesten entfernten noch beobachtbaren Lichtquellen ergibt sich zu $z_{\max} = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - 1$.

Lokale Lichtkegel:

Für radiale Lichtgeodäten ist $ds^2 = R^2 d\chi^2 - c_0^2 dt^2$ und somit

$$\left. \frac{dD}{d[c_0 t]} \right|_{\pm} = \chi \frac{dR}{d[c_0 t]} + \underbrace{\frac{d\chi}{d[c_0 t]} \Big|_{\pm}}_{\pm 1} R = \frac{DH}{c_0} \pm 1$$



Nähert man den Verlauf lokal mit einer Geraden, so gilt allgemein

$$c_0 t = \beta D + \gamma \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{\left. \frac{dD}{d[c_0 t]} \right|_{\pm}} =: \tan(\varphi_{\pm}) .$$

statischer Kosmos: $H = 0$, $\left. \frac{dD}{d[c_0 t]} \right|_{\pm} = \pm 1$

Einstein-de Sitter: $\left. \frac{dD}{d[c_0 t]} \right|_{\pm} = \frac{2}{3} \frac{D}{c_0 t} \pm 1$